# Die neuere englische Logik

von

**L. Liard**
Professor der Philosophie an der Faculté des lettres
zu Bordeaux.

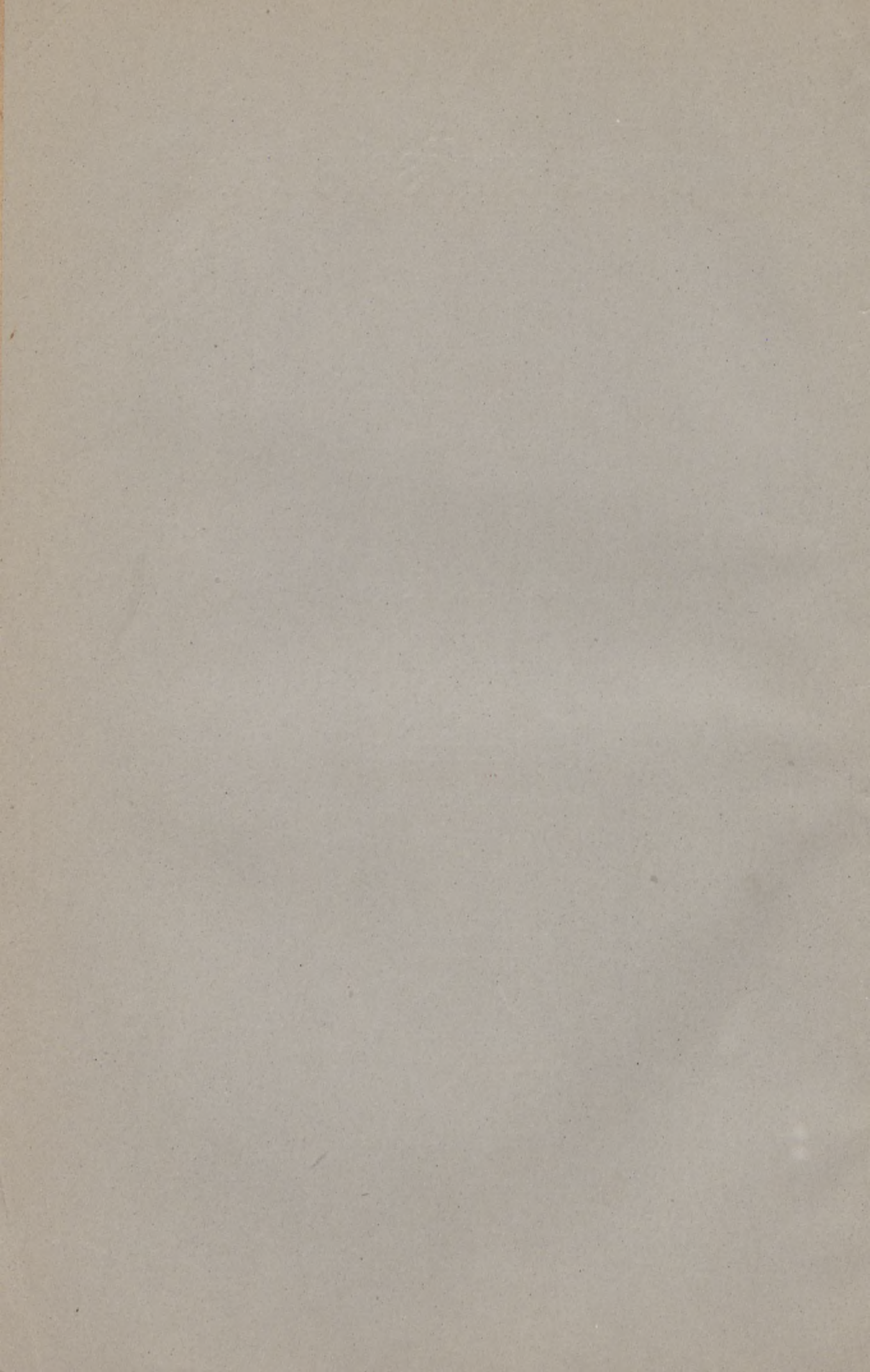
Autorisirte Übersetzung

von

**Dr. I. Imelmann**
Professor am Kgl. Joachimthalschen Gymnasium
zu Berlin.

Zweite Auflage.

Leipzig 1883.
Denicke's Verlag.



# Die neuere englische Logik

von

**L. Liard**
Professor der Philosophie an der Faculté des lettres
zu Bordeaux.

Autorisirte Übersetzung

von

**Dr. I. Imelmann**
Professor am Kgl. Joachimthalschen Gymnasium
zu Berlin.

Zweite Auflage.

Leipzig 1883.
Denicke's Verlag.


Uniwersytetu Gdańskiego
BIBLIOTEKA

## Vorwort des Verfassers.

Das vorliegende Buch ist lediglich darstellenden Inhalts. Die Absicht war, denen, die sich in Frankreich mit logischen Studien befassen, die Kenntnis der — richtigen oder falschen — Systeme zu erleichtern, welche im neunzehnten Jahrhundert in England erschienen sind. Bei der Epoche machenden Bedeutung dieser Systeme in der Geschichte der Wissenschaften muss man fortan mit ihnen rechnen, und ist es nicht mehr erlaubt, sie nicht zu kennen. Die Auskunft, welche man bisher in unserer philosophischen Literatur darüber finden konnte, war sehr unvollständig und häufig irrtümlich, wesshalb es angezeigt schien, sie zu vervollständigen und zu berichtigen.

Diese Arbeit ist Stanley Jevons gewidmet, der durch seine Schriften die erste Anregung dazu gegeben, und dessen wertvolle Beihülfe ihre Ausführung erleichtert hat.

Bordeaux, Januar 1878.

---

## Vorwort des Übersetzers.

Liards[1]) gedrängte aber lichtvolle Darstellung der neueren englischen Logik bildet einen Teil der *Bibliothèque*

[1]) Verfasser des von der Académie des sciences morales et politiques gekrönten Werkes: *la science positive et la métaphysique* (Paris 1879).

*de philosophie contemporaine* und gehört in eine Reihe mit den trefflichen, der neueren und neuesten Philosophie gewidmeten Arbeiten französcher Gelehrten,[1]) welche in den letzten Jahren erschienen sind und auch in Deutschland weiten Kreisen willkommen sein müssen.

Der Gegenstand des kleinen Werkes gehört sicherlich auch bei uns keineswegs zu den bekannteren. Whewell und namentlich Stuart Mill sind uns zwar ziemlich geläufig, und Spencer wenigstens im Begriff es zu werden; denjenigen Logikern jedoch, auf deren Theorieen der Hauptaccent des Buches fällt, und deren Darstellung sein eigentliches Interesse ausmacht, hat sich bisher doch nur beiläufig Aufmerksamkeit und Studium in Deutschland zugewendet. Über Hamiltons Lehre von der Quantificirung des Prädicates handelt Trendelenburg in einem Kapitel der Logischen Untersuchungen; de Morgans Theorie des numerisch bestimmten Syllogismus und vor allem der merkwürdige Versuch Booles, die Logik algebraischen Methoden zu unterwerfen, hat innerhalb unserer logischen Literatur, so viel ich weiſs, nirgends die ihm zukommende Beachtung und Würdigung erfahren. Erst die Fortbildung des Booleschen Standpunktes durch Stanley Jevons lenkt jetzt die Blicke auf die Vorgänger des ausgezeichneten Denkers zurück und verleiht der Frage nach der Haltbarkeit jenes Standpunktes und weiter nach der Bedeutung und dem Wert der neueren englischen Logik überhaupt ein lebhaftes Interesse, ein um so lebhafteres, als neuerdings von mathematischer Seite bei uns verwandte Bestrebungen, die Logik in die Algebra hineinzuziehen oder ihr doch ein algebraisches Gewand anzuziehen, hervorgetreten sind.

Stanley Jevons, dem Verfasser der *Principles of science*,[2]) dem schneidigen Gegner Mills,[3]) gilt Liards

[1]) Th. Ribot, *la psychologie anglaise contemporaine.* — Ders. *la psychologie allemande contemporaine.* — M. Guyau, *la morale anglaise contemporaine* u. a.

[2]) London 1874, 3. Aufl. 1879.

[3]) Über Jevons' Kritik der Millschen Logik habe ich in Schaarschmidts Philosophischen Monatsheften (Bd. XV Heft 3) referirt.

Schlusskapitel. Es führt bequem in das Hauptwerk[1]) des ersten englischen Logikers der Gegenwart ein, an welchen sich hoffentlich recht bald der Mut eines deutschen Übersetzers heranwagt.

Was die vorliegende Übertragung anbelangt, so möge sie ihre Rechtfertigung in der nicht ganz geringen Schwierigkeit des Gegenstandes und in dem Wunsche finden, zur Verbreitung des nützlichen Büchleins in den Kreisen der für logische Fragen sich Interessirenden beizutragen. Wir erfreuen uns in diesem Augenblicke in Deutschland des regsamsten Lebens und kräftigsten Schaffens auf dem Gebiete der Logik; die rasch nach einander erschienenen Schriften von Lotze, Siegwart, Schuppe, Bergmann legen davon Zeugnis ab. Dennoch oder eben darum ist es lohnend, auf die von der unsrigen so weit abliegende Betrachtungsweise der Engländer hinzuweisen und deren in jedem Fall beachtenswerte Methoden der Kenntnisnahme und dem Urteil unserer Forscher näher zu rücken.[2])

Meinem verehrten Freunde Herrn Dr. C. Th. Michaelis, welcher mich bei der Übersetzung wie bei der Correctur aufs bereitwilligste unterstützt, und dessen ausgezeichnete Sachkenntnis über manche Schwierigkeit hinweggeholfen hat, spreche ich auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank aus.

Berlin, October 1879.

---

[1]) Vgl. den schönen Aufsatz von A. Riehl, „Die englische Logik der Gegenwart“ im ersten Jahrgang der „Vierteljahrschrift für wissenschaftliche Philosophie.“ (1877.)

[2]) In dem Original ist eine nicht geringe Anzal Schreib- und Satzversehen unberichtigt geblieben, durch welche das Verständnis zum Teil erschwert wird. Hoffentlich ist es dem Übersetzer gelungen, sie sämtlich zu beseitigen. — S. 80 habe ich der Deutlichkeit halber die Bezeichnung $x_1$, $y_1$, $z_1$ vorgezogen.

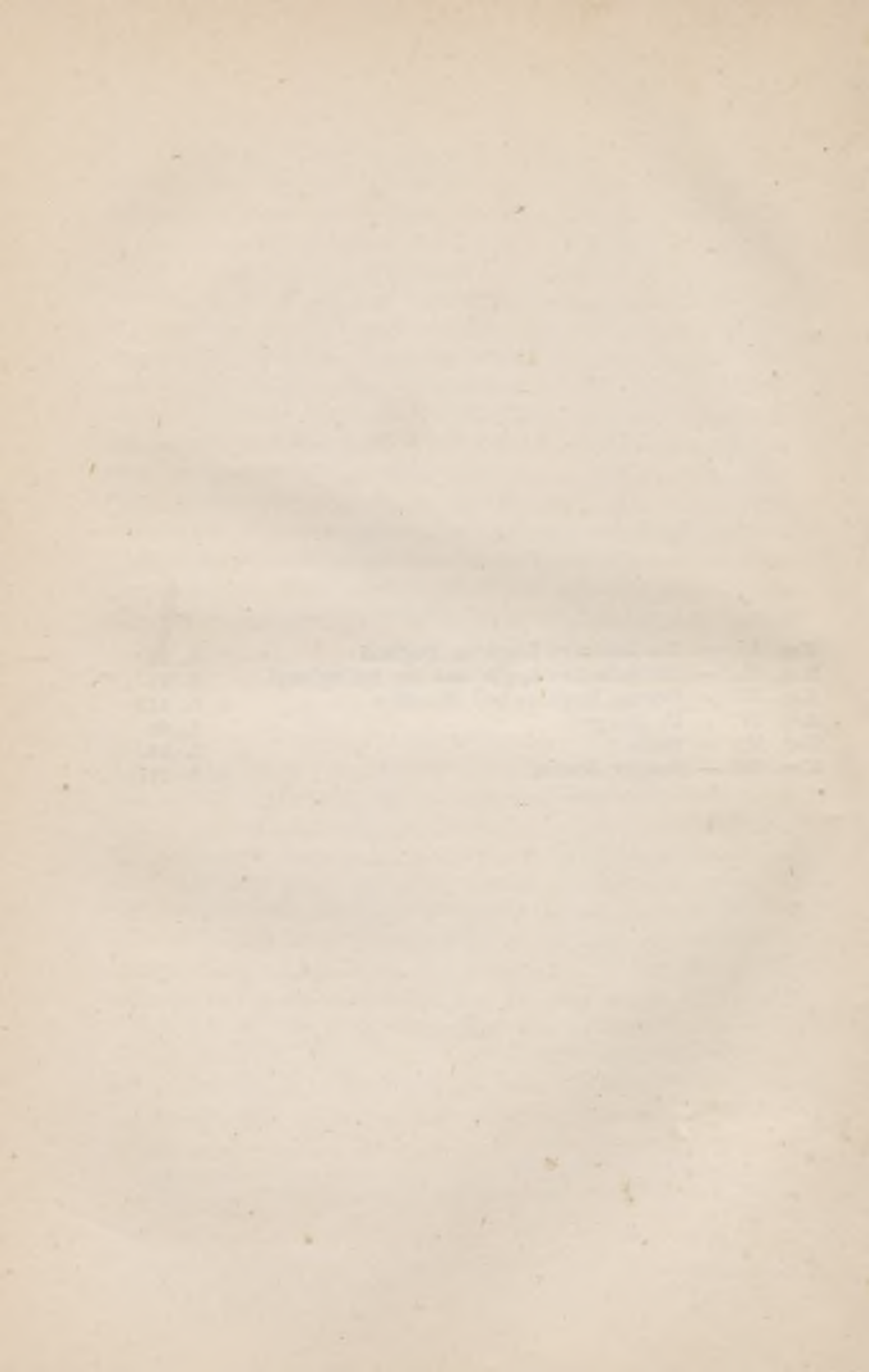
[illegible] in der Wissenschaft das [illegible]
[illegible] der Ergebnisse [illegible]
[illegible]

Die vorliegende Übersetzung [illegible]
[illegible] Veröffentlichung in der [illegible]
[illegible] und in dem Werke [illegible]
[illegible] in den Kreisen der
[illegible] Freunde sich [illegible] — Wir
[illegible] Augenblicke im Deutschland [illegible]
[illegible] Lehren und [illegible] Zahlen [illegible]
[illegible]

[illegible]

[illegible] Oktober 187[illegible].

[illegible]



## Kapitel I.

# Die inductive Logik in England.

I. Die inductive und die formale Logik. — II. Die inductive Logik: Herschel. — III. Whewell. — IV. Stuart Mill.

I. Die englischen Logiker der Neuzeit gehören zwei Hauptrichtungen an: der der materiellen oder inductiven und der der formalen Logik. Für die Einen ist die Logik lediglich die Theorie der Induction und des experimentalen Beweises, für die Andern ist sie, wie Kant gewollt hat, die Wissenschaft von den Gesetzen des Denkens als solchen. Trotz dieses Grundgegensatzes jedoch sind alle einig in der Verwerfung der aristotelischen Logik, an deren Stelle sie ein neues und richtigeres System setzen wollen. Der Unterschied ist nur der, dass, während die Einen, da sie jede Art des Schliefsens auf den Inductionsschluss zurückführen, in dem Syllogismus nur eine verkappte Induction erblicken und damit die Rechtmäfsigkeit der formalen Logik in Abrede stellen, die Andern die Deduction zwar gelten lassen, aber die fragmentarischen und beschränkten Methoden der alten Analytik durch ein vollständiges und umfassendes Deductionsverfahren zu ersetzen wünschen.

Die inductive Logik ist, wenigstens in ihren berühmtesten und neuesten Vertretern, bekannt,[1]) und es wird daher

[1]) Vgl. H. Taine, *le Positivisme anglais*, Paris 1864, [2te Aufl. 1879]. — J. Lachelier, *du Fondement de l'induction*, Paris 1869. — Th. Ribot, *la Psychologie anglaise contemporaine*, 2te Aufl. Paris 1876.

eine rasche Skizze derselben genügen, in welcher nur die vorbereitenden und überleitenden Theorien mit etwas stärkeren Strichen bezeichnet werden sollen.

II. Die Theoretiker der experimentalen Logik stehen sämtlich in Abhängigkeit von Bacon. Allerdings hat dieser genaue, vollständige und unfehlbare methodische Verfahrungsweisen nicht angegeben; indem er jedoch Bedeutung und Würde des positiven Studiums der Erscheinungen seinen Zeitgenossen kräftig zum Bewusstsein brachte, indem er immer wieder betonte, dass die Auffindung der Gesetze einzig und allein aus geduldiger und methodischer Durchforschung der Natur fließe, indem er diejenige Art der Induction, mit der sein Name verknüpft geblieben ist, von der unvollkommenen Art unterschied, die allein den Alten bekannt war, ist er der erste Lehrer der neuen Logik gewesen, welche in den Händen Herschels, Whewells und Stuart Mills in seinem Lande und in unserem Jahrhundert so bedeutende Erweiterungen erfahren sollte.

Herschel[1]) ist ein Forscher. In einer Zeit lebend, da die Naturwissenschaften schon reich an großen Entdeckungen waren, und selber ein ausgezeichneter Entdecker, hat er in einer „Abhandlung über das Studium der Naturwissenschaft" die Methoden formulirt, welche seine Vorgänger und er instinctiv angewendet hatten. Seine allgemeine Auffassung der Wissenschaft liegt der Bacons nahe, zeigt jedoch einen höheren Grad von Präcision, wie er vor den Entdeckungen Newtons und seiner Nachfolger nicht erreicht werden konnte. Unsere Erkenntnis der Natur stammt allein aus der Erfahrung; diese aber offenbart uns die tiefinnern Ursachen nicht, welche die Natur zur Hervorbringung der Erscheinungen ins Werk setzt. Wir kennen nur die Tatsachen und ihre mannigfachen Beziehungen unter einander. Jedoch nennen wir Ursachen die Umstände, welche

---

[1]) *A preliminary Discourse on the Study of natural Philosophy.* Neue Ausgabe. London 1851. [Deutsch von A. Weinlig. Leipzig 1836.]

dem Eintritt der Erscheinungen beständig und unveränderlich vorangehen oder ihn begleiten. Das erste Stadium der Erforschung muss daher die Beobachtung der Tatsachen sein; von dieser erhebt sich der Geist, indem er die erkannten Beziehungen in immer umfassendere Beziehungen einreiht, zu immer allgemeineren Theorien. Vor allem kommt es darauf an, in dem Gewirre der beobachteten Tatsachen die wesentlichen Umstände aus den zufälligen, die unveränderlichen und gleichförmigen aus den vorübergehenden und beweglichen auszusondern; zu diesem Zwecke muss man es verstehen, die wahren Ursachen von den scheinbaren zu unterscheiden, was ohne eine genaue Kenntnis der Beziehung von Ursache und Wirkung nicht möglich ist.

Ursache und Wirkung lassen sich an folgenden Zeichen erkennen: die Ursache und die Wirkung sind unveränderlich verbunden, indem die Ursache der Wirkung vorausgeht, diese jener nachfolgt. In gewissen Fällen aber liegt dieses Zeichen nicht zu Tage. So wird die Wirkung oft nach und nach hervorgebracht, entsprechend der allmälichen Intensitätszunahme der Ursache; in anderen Fällen wieder ist der Übergang zur Wirkung ein so plötzlicher, so augenblicklicher, dass die sie trennende Zwischenzeit nicht zur Wahrnehmung kommt. — Fehlt die Ursache, so bleibt auch die Wirkung aus, es müsste denn eine andere Ursache dieselbe Wirkung hervorzubringen vermögen. — Wenn die Intensität der Ursache veränderlich ist, muss die Wirkung, sobald jene zunimmt oder abnimmt, ebenfalls zu- oder abnehmen. — Die Wirkung ist der Ursache proportional überall, wo letztere direct und ungehindert zur Wirkung kommt. — Die Wirkung ist aufgehoben, sobald die Ursache es ist.

Aus diesen Bestimmungen der Beziehung von Ursache und Wirkung werden allgemeine Regeln abgeleitet, in welchen man leicht den Keim der später von Stuart Mill beschriebenen Experimentalmethoden erkennen kann.

Die Aufgabe ist, die Ursache einer gegebenen Gruppe von Erscheinungen zu bestimmen.

1) Wenn sich in der untersuchten Gruppe von Erscheinungen eine befindet, welche einen Umstand nicht zeigt oder den ihm diametral entgegengesetzten zeigt, so kann dieser Umstand die gesuchte Ursache nicht sein.

2) Ein Umstand, in dem alle Erscheinungen ohne Ausnahme übereinstimmen, kann die gesuchte Ursache oder wenigstens eine Nebenwirkung derselben sein. Ist dieser Umstand der einzige allen Erscheinungen gemeinsame, so ist es gewiss, dass er die Ursache ist; stimmen die Erscheinungen alle in mehreren Umständen überein, so können diese ebensoviel zusammenwirkende Ursachen sein.

3) Wenn die Art, wie eine Ursache ihre Wirkung erzeugt, unsichtbar bleibt, und selbst wenn ihr Vorhandensein unter den gegebenen Verhältnissen schwer zu begreifen ist, so darf man sie darum doch nicht leugnen, sobald sie das übereinstimmende Zeugnis strenger Analogien für sich hat. In solchen Fällen darf man sich nicht a priori gegen die Existenz der vermuteten Ursache entscheiden. So sehen wir, dass die Sonne leuchtet und schliefsen nach Analogie, dass sie eine starke Wärmequelle ist, wiewol wir nicht wissen, wie die Wärme das Licht hervorbringt und wie die Wärme der Sonne unterhalten wird.

4) Entgegengesetzte Fälle sind ebenso lehrreich bei der Auffindung der Ursachen wie die günstigen.

5) Oft werden die Ursachen dadurch deutlich, dass man die Erscheinungen nach dem Grade der Intensität einer allen eigentümlichen Eigenschaft ordnet, jedoch sind die Ergebnisse dieses Verfahrens nicht notwendig genau, da neben der vermuteten Ursache andere, ihre Wirksamkeit aufhebende oder verändernde, in Tätigkeit sein können.

6) Diese entgegenwirkenden Ursachen können unbemerkt bleiben und die Wirkungen der gesuchten Ursache in Fällen, welche sonst zu den bestätigenden gezält werden würden, aufheben. Man kann daher oftmals Ausnahmen beseitigen, indem man solche Nebenursachen entfernt oder in Rechnung bringt. Dies ist von der gröfsten Wichtigkeit in den, sogar sehr zalreichen, Fällen, wo eine entschie-

dene aber einzige Ausnahme sich gegen das einstimmige günstige Zeugnis einer grofsen Menge von Tatsachen erhebt.

7) Wenn wir zwei Tatsachen, welche in allen Umständen, einen einzigen ausgenommen, übereinstimmen, in der Natur antreffen oder selbst hervorbringen können, so muss der Einfluss dieses Umstandes auf die Hervorbringung der Erscheinung eben dadurch deutlich werden. Ist der Umstand in dem einen Fall vorhanden, in dem anderen nicht, so wird die Erzeugung der Erscheinung lehren, ob er die einzige Ursache ist oder nicht. Ist dagegen das Vorhandensein oder Nichtvorhandensein des einen Umstandes von Einfluss nur auf den Intensitätsgrad der Erscheinung, so kann man nur schliefsen, dass er als eine concurrirende Ursache oder als eine Bedingung wirksam ist, welche mit irgend einer anderen, anderweitig festzustellenden Bedingung verknüpft ist. In der Natur findet man selten Fälle, die nur in einem Umstand verschieden sind, nehmen wir aber den Versuch zu Hülfe, so ist es leicht, dergleichen hervorzubringen.

8) Lässt sich der Umstand, dessen Einfluss man festzustellen wünscht, nicht völlig beseitigen, so muss man Fälle aufsuchen, in welchen er beträchtliche Gradverschiedenheiten zeigt. Findet man solche nicht, so muss man versuchen, seine Wirkung durch Einführung irgend eines neuen Umstandes zu schwächen oder zu verstärken, welcher an sich die fragliche Wirkung hervorzubringen fähig scheint. Man darf aber nicht vergessen, dass der so erhaltene Beweis ein indirecter ist, denn der eingeführte neue Umstand kann auf die wirkliche Ursache oder auf irgend einen anderen Umstand einen directen Einfluss haben.

9) Verwickelte Erscheinungen, in denen zusammenwirkende, entgegengesetzte oder völlig von einander unabhängige Ursachen gleichzeitig in Tätigkeit sind, so dass die Wirkung eine zusammengesetzte ist, können dadurch vereinfacht werden, dass man, sei es auf deductivem Wege oder durch Befragung der Erfahrung, die Wirkung aller bekannten Ursachen abzieht und so statt des verwickelten

Phänomens ein einfacheres „Residuum" übrig behält. Durch dieses Verfahren kann die Wissenschaft auf der gegenwärtigen Stufe ihrer Ausbildung neue Fortschritte machen. Die Naturerscheinungen sind tatsächlich sehr complicirt; wenn man nun die Wirkungen aller bekannten Ursachen genau abschätzt und in Abzug bringt, so ist, was übrig bleibt, eine ganz neue Erscheinung.

III. Whewell[1]) will das Organum Bacons vervollständigen und erneuen. Daher der Titel derjenigen seiner Schriften, in welcher die inductiven Methoden am eingehendsten dargelegt sind: *Novum Organum renovatum.* Seine Inductionstheorie hat eine allgemeine Wissenschaftstheorie zur Grundlage, in welcher der Einfluss der Kantischen Philosophie unverkennbar ist.

Nach Whewell enthält eine jede Erkenntnis zwei untrennbare und unreducirbare Elemente: Tatsachen und Ideen. Jene liefern die Sinneswahrnehmungen, diese der Geist. Wenn auch durch geistige Analyse isolirbar, können diese beiden Elemente tatsächlich nicht ohne einander bestehen; unsere Wahrnehmungen lassen sich nicht ohne gewisse Ideen wie Raum, Zeit, Zal, Ursache u. s. w. so verbinden, dass sie Gegenstände des Vorstellens oder des Denkens bilden; ohne diese allgemeinen Verbindungs- und Einheitsprincipien ermöglichen sie uns keine Auffassung der Dinge. Andererseits aber sind die Ideen ohne die Wahrnehmungen leere Abstractionen. Wir können den Raum nicht ohne Körper, die Zeit nicht ohne Geschehendes, die Zal nicht ohne Gezältes denken, und Körper, Geschehendes und Gezältes setzen Sinneswahrnehmungen voraus. Der Gegensatz der Wahrnehmungen und

[1]) William Whewells logische Schriften sind die folgenden: *History of the inductive sciences.* London 1837. 3 Bde. [Deutsch von Littrow 1838—42.] *The philosophy of the inductive sciences.* London 1840. 2 Bde. *History of the scientific ideas.* (Auszug aus dem letztgenannten Werk.) London 1856. 2 Bde. — *Novum Organum renovatum.* London 1858. 1 Bd. *On the philosophy of discovery.* London 1860. 1 Bd.

der Ideen ist die Grundlage der Theorie der Wissenschaft; er macht uns ihr Wesen, ihre Entwicklung und Methode begreiflich.

Die Aufgabe der Wissenschaft besteht in der systematischen Verbindung der Erscheinungen durch Ideen, ihre Fortschritte in der Anwendung immer klarerer und umfassenderer Ideen auf immer besser beobachtete Tatsachen, ihre Methode in der Erzielung neuer Wahrheiten durch Auslegung der Tatsachen mit Hülfe der ideellen Conceptionen.

Diese Ideen aber, die Seele der Wissenschaft, was sind sie? — Nicht transformirte, sondern „informirte" Wahrnehmungen. Trennt man im Geiste die Form der Erkenntnis von ihrem Inhalt, so erhält man ideelle Elemente in zweierlei Gestalt: Begriffe und Axiome. Es ist die Eigentümlichkeit der Grundideen auf allen Gebieten der Wissenschaft, dass sie bruchstückweise erscheinen und nach und nach zum Ausdruck kommen. Man nehme z. B. die Raumidee; auf ihr ruht die Geometrie und, durch diese, alle direct oder indirect von der Wissenschaft der Ausdehnung abhängigen Wissenschaften. Diese Idee tritt in einer unendlichen Menge besonderer Begriffe in die Erscheinung: Linie, Oberfläche, Körper, gerade Linie, krumme Linie, Dreieck, Viereck, Kreis, Ellipse, Quadrat, Kugel, Cylinder, Kegel u. s. w., welche Gegenstände der geometrischen Definitionen sind. Gleichzeitig aber mit diesen Begriffen ist eine gewisse Zal notwendiger, sämtlich auf den Raum bezüglicher und seine wesentlichen Eigenschaften ausdrückender Wahrheiten gegeben, wie die Axiome der geraden Linie und der Parallelen. Ebenso tritt die Idee der Ursache, welche allen mechanischen Wissenschaften zu Grunde liegt, in den Begriffen der Kraft und des Widerstandes und in folgenden Axiomen zu Tage: alles Geschehende muss eine Ursache haben; die Ursachen werden an ihren Wirkungen gemessen; die Gegenwirkung ist der Wirkung gleich und entgegengesetzt.

Der den wissenschaftlichen Axiomen eigene Charakter der Notwendigkeit klärt uns über den Ursprung und das

Wesen der Grundideen auf, von denen sie stammen. Da die abgeleiteten Axiome notwendig sind, sind es auch die Ideen, ihre Quelle. Sie sind nicht empirischen Ursprungs, da die Erfahrung nichts Notwendiges ergeben kann; sie sind unumgängliche und evidente Bedingungen unserer Erkenntnis. Es ist daher in dem Wissen ein metaphysisches Element; die Analyse der Erkenntnis sowol wie die Geschichte der wissenschaftlichen Ideen beweist es.

Hiernach entsteht Wissenschaft, wenn unsere Begriffe klar und deutlich sind, und wenn sie die Tatsachen, auf welche sie angewendet werden, dergestalt verbinden, dass eine genaue und allgemeine Zusammenstimmung sich ergibt. Aufhellung der Begriffe und Verknüpfung der Dinge, diese beiden Tätigkeiten sind somit gleichzeitig zum Aufbau der Wissenschaft erforderlich.

Wir sehen, dass die Ideen gewisse umfassende Denkformen sind, die wir auf die Erscheinungen anwenden, z. B. die Idee des Raumes, der Zeit, der Zal, der Ursache, der Ähnlichkeit u. s. w. Die Begriffe sind specielle Modificationen dieser Ideen, wie Kreis, Quadratzal, beschleunigende Kraft u. s. w., welche gewisse allgemeine und notwendige, von den Ideen abgeleitete Beziehungen, die Axiome, involviren. Diese ideellen Elemente sind in allen Gesetzen enthalten, wie es die Analyse eines jeden beliebigen Gesetzes unwiderleglich beweist. So setzen die Kepler'schen Gesetze aufser dem Begriff einer beschleunigenden Centralkraft den des Quadrates der Zalen, des Cubus der Entfernungen, des Verhältnisses dieser Quantitäten u. s. w. voraus; sie konnten daher erst, als diese Begriffe hinlänglich klar und deutlich waren, entdeckt und formulirt werden. — Die Aufhellung der Begriffe ist ebensowol die Folge wie die unentbehrliche Bedingung wissenschaftlicher Fortschritte. Je klarer die Ideen werden, desto weiter erstreckt sich ihre Anwendung, und eine immer gröfsere Zal von Erscheinungen verdichtet sich zu immer allgemeineren Formulirungen; andrerseits aber führt eine genaue Beobachtung der Tatsachen

ebenso wie die wissenschaftliche Discussion und Controverse zu immer klareren und deutlicheren Ideen.

Die Methoden der Beobachtung sind darum, als Ausgangspunkt wissenschaftlicher Entdeckung, von der allerhöchsten Wichtigkeit. Da der Zweck der im eigentlichen Sinne so genannten Verfahrungsweisen die Sammlung genau begrenzter Tatsachen ist, lassen sich die meisten von ihnen auf Messungen zurückführen. Die hauptsächlichen Messungsarten sind die folgenden: die Zälung, die Messung von Raum und Zeit, die Verwandlung von Raum in Zeit und umgekehrt mit Hülfe der Bewegung, die Methode der Wiederholung, der Coincidenz oder Interferenz, die der doppelten Wägung, endlich die Messung der secundären Eigenschaften der Materie, des Schalles, der Wärme, des Lichtes, mit Hülfe conventioneller Scalen.

Die Klärung der Begriffe und die Beobachtung der Erscheinungen bereiten die geistigen und sinnlichen Materialien der Wissenschaft nur vor. Erst die Induction setzt die letztere in Bewegung. Die Induction ist, ob es sich nun um die Auffindung der Gesetze oder um die der Ursachen der Erscheinungen handelt, ihrem Wesen nach die richtige Verknüpfung der Tatsachen mittels genauer und angemessener Begriffe. Sie ist somit weder die bloſse Summe der verknüpften Tatsachen noch die diese verknüpfende Idee, sondern der Act, durch welchen der Geist in die zerstreuten und getrennten Dinge das sie einigende intellectuelle Element einführt.

In der so definirten Induction sind drei Stufen zu unterscheiden: die Wal der Idee, die Bildung des Begriffes und die Bestimmung der Gröſsen. Die beiden ersten besagen im Grunde dasselbe, da der Begriff nur eine besondere Modification der Idee ist; beide hängen gröſstenteils vom Scharfsinn des Entdeckers ab. Ein an klaren Ideen noch so reicher Geist ist darum noch nicht im Stande, diejenige zu finden, unter welche die beobachteten Erscheinungen gehören. Genie ist durch nichts zu ersetzen, und wenn es Methoden zur Verificirung einmal gebildeter

Hypothesen gibt, so gibt es keine zur Hypothesenbildung selbst. Wenngleich aber die Construction des den Tatsachen angemessenen Begriffes in der Regel das spontane Erzeugnis des Entdeckergenies ist, so wird sie doch häufig durch die genaue Bestimmung der Gröſsen sehr nahe gelegt, vor allem da, wo die Erscheinungen numerischen Maſs- und Zalenausdruck zulassen. Mit diesen letzteren, übrigens zalreichen Fällen, beschäftigt sich Whewell besonders eingehend, indem er die verschiedenen auf die Quantität anwendbaren Inductionsmethoden beschreibt. Die wichtigsten darunter sind die Methode der Curven, die des arithmetischen Mittels, die der kleinsten Quadrate und die der Rückstände.

Die *Methode der Curven* besteht in der Ziehung einer Curve, deren Ordinaten die beobachteten Quantitäten und deren Abscisse die Quantität ist, von welcher die Veränderung jener Quantitäten abhängt. Die Wirksamkeit dieser Methode beruht auf der Fähigkeit des Auges, Regelmäsſigkeit und Unregelmäſsigkeit in den Formen mit Leichtigkeit wahrzunehmen. Man kann sie anwenden, um die Gesetze der beobachteten Quantitäten zu finden oder um die Beobachtungen, wenn sie ungenau sind, zu berichtigen.

Die *Methode des Mittels* beseitigt die Unregelmäſsigkeiten, indem sie aus einer groſsen Anzal beobachteter Quantitäten das arithmetische Mittel nimmt. Ihre Wirksamkeit beruht auf dem Princip, dass in Fällen, wo die beobachteten Quantitäten andere Ungleichheiten bieten, als diejenigen, deren Gesetz wir zu bestimmen wünschen, die nach dem Mehr und dem Minder hin gehenden Abweichungen von den Quantitäten, welche das in Frage stehende Gesetz ergeben müsste, sich ausgleichen, sobald die Zal der Fälle eine sehr groſse ist.

Die *Methode der kleinsten Quadrate* ist im Grunde eine Methode des Mittels. Sie will das wahrscheinlichste Gesetz feststellen, welches sich aus einer Anzal von ganz oder teilweise unvollkommenen Beobachtungen

gewinnen lässt. Sie beruht auf der Annahme, dass nicht alle Fehler in gleichem Grade wahrscheinlich, vielmehr die kleinen es mehr als die grofsen sind. Wenn man auf dieser Grundlage mathematisch weiter denkt, so findet man, dass derjenige Mittelwert der wahrscheinlichste ist, für welchen die Summe der Fehlerquadrate ein Kleinstes ist.

Endlich die *Methode der Rückstände,* welche anwendbar ist, wenn mehrere Gesetze gleichzeitig wirken, und ihr combinirter Einfluss die beobachteten Quantitäten modificirt, besteht in der Subtraction der durch ein bereits bekanntes Gesetz gegebenen Quantität von den aus der Beobachtung gewonnenen Quantitäten, und in der Aufsuchung des Gesetzes des Restes oder des Rückstandes. Ist dieses Gesetz gefunden, so muss man, im Fall eine neue Untersuchung stattfindet, die Quantität, die es ergibt, von dem ersten Residuum abziehen und das so erhaltene zweite Residuum nach den gewöhnlichen Methoden behandeln, um dessen Gesetz aufzufinden, und so fort, bis die Data der Beobachtung erschöpft sind.

Zu diesen Methoden kommen andere, auf die Ähnlichkeit gegründete: die *Methode der Gradation* und die der *natürlichen Classification.* Die erstgenannte setzt das *Gesetz der Continuität* voraus, nach welchem eine Quantität bei veränderten Bedingungen nicht von einem Wert zum anderen übergehen kann, ohne durch sämtliche in der Mitte liegende Gröfsen, entsprechend den in der Mitte liegenden Bedingungen, hindurchgegangen zu sein, und sie besteht darin, dass man zwei gegebene ungleichartig scheinende äufserste Fälle durch eine Reihe Zwischenstufen verbindet, um auf Grund einer solchen ununterbrochenen Stufenfolge eine Entscheidung über ihre Wesensgleichheit oder Verschiedenheit treffen zu können.

Die *Methode der natürlichen Classification* besteht in der Anordnung der untersuchten Fälle nach Mafsgabe des tatsächlichen Zusammenhanges der Erscheinungen, um auf diese Weise allgemeine Wahrheiten aus ihnen gewinnen zu können.

Die im Vorstehenden kurz beschriebenen inductiven Methoden führen uns lediglich zu den Gesetzen der Erscheinungen; es gibt aber andere Inductionen, welche über Quantitäts- und Ähnlichkeitsverhältnisse hinaus tiefer eindringen in die Natur und die wirklichen Zusammenhänge der Dinge. Whewell nennt sie *Inductionen der Ursachen*. Sie beruhen nach ihm hauptsächlich auf den Ideen der *Substanz* und der *Ursache*. Eine Anzal wissenschaftlicher Probleme bezieht sich auf die eigentlichen Ursachen der Erscheinungen, z. B. diese: haben Wärme, Licht, Elektricität eine reelle Existenz als unwägbare Fluida? Bei allen Fragen dieser Art ist die Substanzidee mit im Spiele, und es ist deren wissenschaftlicher Gebrauch unanfechtbar. So hat das Axiom der Substanz, dass das Gewicht eines Ganzen dem Gewicht seiner Factoren gleich sein muss, welche Veränderungen auch immer Zusammensetzung und Trennung dieser letzteren hervorbringen mögen, die phlogistische Theorie vernichtet und die moderne Oxydirungstheorie auf unerschütterlichen Grundlagen aufgebaut. Whewell geht auf derartige Inductionen wenig ein, die im Grunde von denjenigen, welche er Inductionen der Gesetze nennt, wenig verschieden sind. Vielleicht hat er sie überhaupt nur in Hinsicht auf einen der positiven Wissenschaft fremden Gegenstand angedeutet: die Begründung einer ersten Ursache, in welcher ihm zufolge die Causalitätsreihe ihren Abschluss findet.

Wie man sieht, sind die von Herschel und Whewell beschriebenen inductiven Methoden ausschliefslich Methoden der Entdeckung. Die Wahrheit, welche nach ihnen Stuart Mill mit solchem Nachdruck hervorheben sollte, scheinen beide nicht erkannt zu haben, dass nämlich jegliche Logik, selbst eine inductive, eine Wissenschaft nicht der Entdeckung, sondern des Beweises ist. Whewell insbesondere liefs sich trotz seiner gründlichen Kenntnis der wissenschaftlichen Theorien alter und neuer Zeit durch die scheinbare Einfachheit, welche der von ihm für fundamental gehaltene Gegensatz der Tatsachen und Ideen in die Auffassung

der Wissenschaft und der Methoden bringt, irre führen und verkannte darum die wirkliche Beschaffenheit des inductiven Verfahrens. Wenn man den Process der Wissensbildung auch darstellen kann als die Anwendung von Ideen, die aus dem Geiste stammen, auf die von der sinnlichen Wahrnehmung gebotenen Erscheinungen, so fragt es sich doch, wie denn die so gewonnenen Sätze Gesetzeskraft bekommen, und damit werden wir zu dem Problem geführt, wie wir der Gültigkeit jener Gesetze gewiss sein können, und welches die Hülfsoperationen des Erfahrungsbeweises sind.

Stuart Mill war es vorbehalten, mit strenger Genauigkeit der inductiven Logik ihr Gebiet abzugrenzen, ihr Grundproblem richtig hinzustellen und ihre Hauptmethoden mit einer zuvor nicht dagewesenen Präcision zu bezeichnen. Sein System der Logik ist gegenwärtig in den Händen aller Philosophirenden, und glänzende Schriften haben die Lehren desselben popularisirt, daher wir nur in aller Kürze seine wesentlichen Sätze wiedergeben wollen.

IV. Stuart Mills gröſste Originalität besteht, wie Bain bemerkt, vielleicht darin, dass er „eine scharfe Grenzlinie zwischen der Kunst der Entdeckung und der Kunst der Beweisführung" gezogen hat. Er definirt die Logik als „die Wissenschaft von den Verstandesverrichtungen, welche der Schätzung von Beweisgründen dienen, von dem allgemeinen Processe sowohl, der vom Bekannten zum Unbekannten führt, als auch von den Hülfsverrichtungen dieser fundamentalen Fähigkeit."

Von Bekanntem zu Unbekanntem gehen heiſst schlieſsen oder folgern. Gewöhnlich unterscheidet man Schlüsse vom Besonderen auf das Allgemeine: Inductionen, und Schlüsse vom Allgemeinen auf das Besondere: Syllogismen. Beide Arten sind jedoch aus einer primitiven Schlussart abgeleitet, dem Schluss von Besonderem auf Besonderes. Die Logik hat zu zeigen, wie sich aus dieser ursprünglichen und nicht weiter zu zerlegenden Schlussart die wissenschaftliche Induction und Deduction entwickeln. Wir beschränken uns auf das die erstere Betreffende.

Unsere frühesten Schlüsse sind Stuart Mill zufolge sämtlich Schlüsse von Besonderem auf Besonderes. Vom ersten Schimmer unserer Intelligenz an ziehen wir Schlüsse, und Jahre vergehen, ehe wir den Gebrauch der allgemeinen Begriffe lernen. Das Kind, welches sich den Finger verbrannt hat, hütet sich, ihn dem Feuer wieder nahe kommen zu lassen; es hat gefolgert und geschlossen, ohne sich dabei eines allgemeinen Princips bedient zu haben. Es erinnert sich, dass es sich verbrannt hat, und ohne andere Bürgschaft als diese Erinnerung glaubt es, dass, wenn es den Finger wieder dem Feuer nähert, es sich abermals verbrennen wird. Das Bild des Feuers und der Gedanke an den früheren Schmerz associiren sich in seinem Geiste, und das Vorhandensein des einen genügt, um den anderen hervorzurufen. Der gleiche Schluss wiederholt sich in jedem gleichen Falle und niemals geht er über den jedesmal vorliegenden Fall hinaus. Ohne Verallgemeinerung wird ein Besonderes aus einem Besonderen gefolgert.

Eine solche instinctive und eingeschränkte Induction ist aber sehr verschieden von der bewussten und wissenschaftlichen. Wie kommen wir von der einen zur anderen? Wie kann aus dem Schluss von Besonderem auf Besonderes der Schluss von Besonderem auf Allgemeines entstehen? Die wissenschaftliche Induction schließt, dass „was in einem Falle wahr ist, in allen gleichen Fällen sich ebenfalls als wahr erweisen wird.“ Schon aus dieser kurzen Fassung erhellt, dass eine solche Operation ein Princip oder Postulat voraussetzt. Um zu glauben, dass, was in einem Fall geschehen ist, in allen gleichen Fällen wieder geschehen wird, muss man zuvor glauben, „dass es in der Natur parallele Fälle gibt, dass, was sich einmal ereignet, sich unter hinlänglich ähnlichen Umständen abermals ereignen wird, und nicht nur abermals, sondern so oft, wie dieselben Umstände wiederkehren.“[1])

Wie aber entsteht diese Überzeugung? Die Gleich-

---

[1]) *Syst. of Log.* Buch III, Kap. 3.

förmigkeit der Natur ist, wenn wir in die leere Form einen Inhalt legen, nichts anderes, als die Summe der partiellen Gleichförmigkeiten, sie ist eine complexe Tatsache, zusammengesetzt aus den Gleichförmigkeiten der einzelnen Erscheinungen, oder was dasselbe ist: das Princip oder Postulat der Induction ist der abgekürzte Ausdruck aller unserer partiellen Inductionen. So bekommen wir aber offenbar einen Kreisbeweis. Die Induction vom Besonderen auf das Allgemeine verlangt den Glauben an die Gleichförmigkeit des Naturlaufes, welcher Glaube hinwiederum nur aus den, ohne ihn kraft- und wertlosen, besonderen Inductionen zu gewinnen ist.

Vergessen wir aber nicht, von welcher Art die primitiven Inductionen sind. Sie gehen von einem besonderen Fall auf einen anderen besonderen Fall. Der Mensch schliefst noch unwillkürlich, ohne die Hilfe irgend eines Principes. Nun erzeugt aber die regelmäfsige Wiederkehr der besonderen Fälle, so wie wir sie unter gleichen Verhältnissen kraft jener unseren frühesten Schlüssen zu Grunde liegenden spontanen und fast mechanischen Erwartung voraussehen, die Vermutung, dass es mit allen Erscheinungen eben so ist; mit der zunehmenden Zal der bestätigenden Fälle wird diese Vermutung immer gewisser, und da keine Tatsache ihr zuwiderläuft, gelangt der Geist ganz natürlich dazu, alle diese vorläufigen und gleichsam skizzirten Gesetze zu einer allgemeinen Formel zusammenzufassen, und schliefslich gewinnt der Glaube an die Gleichförmigkeit des Naturlaufes durch die Übereinstimmung der günstigen Zeugnisse und das Nichtvorhandensein eines ungünstigen eine solche Kraft, dass wir uns ihm nicht entziehen können, ohne unseren stärksten Denkgewohnheiten in nicht zu rechtfertigender Weise Gewalt anzutun. Nunmehr stralt die Gewissheit, welche er gewonnen hat, auf die besonderen Gesetze zurück, und so vollzieht sich, mittels des Princips der Gleichförmigkeit der Natur, der Übergang von dem Schluss von Besonderem auf Besonderes zu dem Schluss von dem Besonderen auf das Allgemeine.

Mill nennt jenes Princip auch das Gesetz der allgemeinen Causalität, da tatsächlich von den Gleichförmigkeiten der Natur die wichtigsten und wissenschaftlich bedeutungsvollsten die Gleichförmigkeiten der Succession sind, jede regelmäſsige Succession aber Ursache und Wirkung in sich begreift. — Was ist im wissenschaftlichen Sinne des Wortes eine Ursache? In der Natur tritt eine Erscheinung nicht losgelöst, vielmehr verknüpft mit einer Gruppe vorangehender Umstände ein. Die Analyse dieser Umstände ergibt, dass die einen unveränderlich, die anderen von Fall zu Fall veränderlich sind. Ursache einer Erscheinung nun nennen wir das „Antecedens, welchem diese Erscheinung unwandelbar folgt.“[1]) Dies ist jedoch eine ungenügende Definition; denn wenn die Unwandelbarkeit der zeitlichen Aufeinanderfolge das einzige Zeichen des ursächlichen Verhältnisses wäre, müsste man auch sagen können, dass die Nacht die Ursache des Tages und der Tag die Ursache der Nacht ist, da sie regelmäſsig und unveränderlich einander ablösen. Es muss daher zu der Unveränderlichkeit der Zeitfolge noch ein Merkmal hinzukommen und zwar die Nichtbedingtheit des Antecedens. Nacht und Tag folgen unveränderlich aufeinander, ohne dass wir das Eine die Ursache des Anderen nennen können, weil diese Aufeinanderfolge selbst einer Bedingung unterworfen ist, nämlich der, dass die Sonne über dem Horizonte aufgeht. Diese letztere Erscheinung macht es, dass das Licht der Finsternis folgt. Tritt sie ein, so löst der Tag die Nacht ab, tritt sie nicht ein, so ist die Aufeinanderfolge unterbrochen. Somit ist der Aufgang der Sonne über dem Horizont und die Abwesenheit eines undurchsichtigen Körpers in gerader Linie zwischen ihr und dem Teil der Erde, auf dem wir uns befinden, für uns die Bedingung, ohne welche der Tag nicht entstehen würde. Man muss daher die Ursache einer Erscheinung definiren als „das Antecedens oder die Vereinigung von Anteceden-

---

[1]) a. a. O. Buch III. Kap. 5.

tien, auf welche die Erscheinung unveränderlich und unbedingt folgt."

Nach dieser Bestimmung des Causalbegriffes ist es leicht, den Mechanismus des experimentalen Beweises klarzulegen. Jeder Erscheinung geht eine Schar mannigfaltiger Umstände voraus, und jede Erscheinung gehört auch ihrerseits zu einer solchen Schar. Die Aufgabe ist daher nachzuweisen, welche Antecedentien und welche Folgeerscheinungen in diesem unaufhörlichen Nacheinander unveränderlich mit einander verknüpft sind. Es sind dazu drei Operationen erforderlich: die geistige Sonderung, die tatsächliche Sonderung der Erscheinungen, und die Veränderung der Umstände; mit anderen Worten: Beobachtung und Versuch.

Die Methoden der Experimental-Forschung sind: die Methode der Übereinstimmung, die Methode des Unterschiedes, die vereinigte Methode der Übereinstimmung und des Unterschiedes, die Methode der Rückstände und die Methode der Begleitveränderungen [1])

*Methode der Übereinstimmung.* „Es sei A eine Ursache, und es sei die Aufgabe, die Wirkungen derselben festzustellen. Können wir die Ursache A in verschiedenen Combinationen von Umständen antreffen oder erzeugen, und haben die verschiedenen Fälle keinen Umstand aufser A gemein, dann stellt sich irgend eine Wirkung, welche in sämtlichen Versuchen eintritt, als die Wirkung von A heraus. Man nehme z. B. an, dass A zusammen mit B und C zur Anwendung kommt, und dass die Wirkung *a b c* ist; dass alsdann A mit D und E, aber ohne B und C versucht wird und dass die Wirkung *a d e* ist. In diesem Fall wird man folgendermafsen schliefsen: b und *c* sind nicht die Wirkungen von A, denn sie sind in dem zweiten Versuch nicht von A hervorgebracht worden; *d* und *e* auch nicht, denn sie sind es in dem ersten nicht. In beiden Fällen aber muss, was auch immer die Wirkung

[1]) a. a. O. Buch III. Kap. 8.

von A ist, hervorgebracht worden sein. Diese Bedingung nun hat lediglich der Umstand *a* erfüllt. Die Erscheinung *a* kann nicht die Wirkung von B oder von C sein, da sie eintrat, als diese nicht vorhanden waren, und aus demselben Grunde nicht von D oder von E. Also ist es die Wirkung von A."

*Methode des Unterschiedes.* Bei der vorangehenden Methode handelte es sich darum, Fälle zu erhalten, welche in dem gegebenen Umstande übereinstimmen, aber in jedem anderen verschieden sind. Bei der Methode des Unterschiedes suchen wir im Gegenteil zwei Fälle, welche, in jeder anderen Beziehung einander ähnlich, sich durch das Vorhandensein oder Nichtvorhandensein des untersuchten Phänomens unterscheiden. Wenn es unsere Aufgabe ist, die Wirkungen einer Ursache A zu entdecken, müssen wir uns A in einigen Gruppen von genau festgestellten Umständen, wie A B C verschaffen, und wenn wir uns die eingetretenen Wirkungen gemerkt haben, sie mit der Wirkung der übrigen Umstände B C vergleichen, wenn A abwesend ist. Ist die Wirkung von A B C: *a b c* und die Wirkung von B C: *b c*, so ist es augenscheinlich, dass *a* die Wirkung von A ist. Ebenso, wenn wir am anderen Ende beginnen und die Ursache einer Wirkung a feststellen wollen, müssen wir einen Fall wie *a b c* wälen, in dem die Wirkung eintritt und in welchem die Antecedentien A B C waren, und uns dann nach einem anderen Fall umsehen, in welchem die übrigen Umstände *b c* ohne *a* eintreten. Wenn in diesem letzteren Fall die Antecedentien B C sind, so wissen wir, dass A die Ursache von *a* sein muss, A allein oder in Verbindung mit irgend einem von den anderen vorhandenen Umständen.

*Vereinigte Methode der Übereinstimmung und des Unterschiedes.* Zuweilen ist es unmöglich, das erforderliche Par von Fällen zu erlangen. Alsdann kann man mit Hülfe einer doppelten Anwendung der Übereinstimmungsmethode entdecken, worin sich die Fälle, welche A und *a* enthalten, von denen unterscheiden, welche

es nicht enthalten. Wenn die Vergleichung verschiedener Fälle, in denen *a* eintritt, ergibt, dass sie alle den Umstand A und (soweit man beobachten kann) keinen anderen enthalten, so bezeugt die Übereinstimmungsmethode eine Verbindung zwischen A und *a*. Um diesen Beweis der Verbindung mit Hülfe der directen Unterschiedsmethode in einen Beweis ursächlichen Zusammenhanges verwandeln zu können, müsste man im Stande sein, in irgend einem dieser Fälle, z. B. in A B C, A auszuschließen und zuzusehen, ob alsdann *a* ausbleibt. Nehmen wir nun an, dass wir, was oft der Fall ist, diesen entscheidenden Versuch anzustellen nicht vermögen, so wird doch der Gewinn derselbe sein, wenn es uns nur auf irgend eine Weise gelingt, zu entdecken, welches sein Ergebnis wäre, falls wir ihn anstellen könnten. Setzen wir nun voraus, dass, nachdem wir zuvor verschiedene Fälle, in welchen *a* stattfand, untersucht und gefunden haben, dass sie alle gleichmäßig A enthalten, wir jetzt verschiedene Fälle beobachten, in welchen *a* nicht eintritt und finden, dass sie alle gleichmäßig A nicht enthalten, so tut die Methode der Übereinstimmung zwischen dem Nichtvorhandensein von A und dem Nichtvorhandensein von *a* dieselbe Verbindung dar, wie vorher zwischen ihrem Vorhandensein. Indem nun ebenso, wie zuvor constatirt wurde, dass allemal wenn A da ist, es auch *a* ist, jetzt gezeigt wird, dass sobald A ausbleibt, auch *a* entfällt, so erhält man das eine Mal A B C: *a b c*, das andere Mal: B C: *b c* und damit die positiven und die negativen Fälle, wie sie die Methode des Unterschiedes verlangt.

*Methode der Rückstände.* Das Princip dieser Methode ist sehr einfach. Wenn man von einer gegebenen Erscheinung alles das abzieht, was auf Grund früherer Inductionen erklärt werden kann, so wird das Übrigbleibende die Wirkung der Antecedentien sein, welche übersehen worden sind oder deren Wirkung bisher noch eine unbekannte Größe war.

*Methode der Begleitveränderungen.* Es ist noch

eine Klasse von Gesetzen übrig, welche sich durch keine der beschriebenen Methoden ermitteln lassen, nämlich die Gesetze jener dauernden Ursachen, jener unzerstörbaren Agentien, welche es ebenso unmöglich ist auszuschliefsen als zu isoliren. Allein wir besitzen noch eine Hülfsquelle. Wenn wir auch ein Antecedens nicht völlig ausschliefsen können, so können wir doch, oder die Natur für uns, im Stande sein, es irgendwie zu modificiren. Unter Modification ist hier eine Veränderung zu verstehen, welche nicht bis zur völligen Aufhebung des Dinges geht. Wenn auf eine gewisse Veränderung in dem Antecedens A regelmäfsig eine Veränderung in dem Consequens *a* folgt, während die beiden anderen Folgeerscheinungen *b* und *c* dieselben bleiben, oder umgekehrt: wenn jeder Veränderung in *a* eine in A vorhergeht, ohne dass man irgend eine Veränderung in den anderen Antecedentien beobachtet, so kann man mit vollkommener Sicherheit schliefsen, dass *a* ganz oder zum Theil eine Wirkung von A oder doch wenigstens mit diesem irgendwie ursächlich verknüpft ist. Die Wärme z. B. kann man zwar nicht gänzlich aus einem Körper austreiben, wol aber ihrer Quantität nach verändern, man kann sie steigern oder vermindern, und man findet auf diese Weise mit Hülfe der verschiedenen Methoden des Versuches oder der Beobachtung, dass Zunahme oder Abnahme der Wärme Ausdehnung oder Zusammenziehung der Körper zur Folge hat. So kommt man zu dem sonst auf keine Weise zu ermöglichenden Schluss, dass eine der Wirkungen der Wärme die Vergröfserung des Umfanges der Körper ist.

Dies sind, nach Mill, die Principien und Grundverrichtungen der inductiven Logik.

---

## Kapitel II.

# Die inductive Logik und der Syllogismus.

I. Stuart Mill: die petitio principii jedes Syllogismus; Function des Syllogismus; Formel des Syllogismus. — II. Herbert Spencer: Definition der Logik; Kritik des peripatetischen Syllogismus.; Schluss von Besonderem auf Besonderes; Syllogismus mit vier Begriffen; Princip der Ähnlichkeit.

I. An sich enthält die inductive Logik nichts, was mit der Existenz einer formalen Logik unverträglich wäre; man kann die Regeln der erfahrungsmäſsigen Untersuchung und Beweisführung aufstellen, ohne die Rechtmäſsigkeit der syllogistischen Deduction zu leugnen. Als Bacon sagte: „Rejicimus syllogismum," wollte er ihn lediglich als ein Werkzeug der Entdeckung in die Acht erklären; die Bedeutung der peripatetischen Logik innerhalb der Grenzen, in welche ihr Urheber selbst sie eingeschlossen hatte, bestritt er nicht, und Whewell denkt in diesem Punkte nicht anders als Bacon.

Stuart Mill und ihm nach Herbert Spencer wurden jedoch durch ihre Lehren von dem Ursprung und der Entstehung der Erkenntnis dahin geführt, das ganze Gebiet der formalen Logik in die inductive hineinzuziehen. Zu allen Zeiten waren die Logiker einig in der Anerkennung einer Wissenschaft von der allgemeinen Form des Denkens. Kant insbesondere erklärte, die Tätigkeit des Verstandes sei

Gesetzen unterworfen; die einen, von den bestimmten Objecten der Erkenntnis abhängenden, seien ebenso zalreich wie diese und zufällig, die anderen, welche aus der Natur des Verstandes selber stammen, seien notwendig. Sieht man von jeder auf die besonderen Gegenstände bezüglichen Erkenntnis ab, um allein den Gebrauch des Verstandes im allgemeinen zu betrachten, so gelangt man zu einer Wissenschaft, zu welcher nichts gehört, was die Materie des Erkennens betrifft. In einer solchen Wissenschaft kommt die objective Wahrheit der Principien und Schlusssätze nicht in Frage, vielmehr handelt es sich lediglich darum, wie sich aus gewissen, hypothetisch angenommenen Sätzen Schlüsse ziehen lassen, welche mit den constitutiven Forderungen des Verstandes im Einklang sind.

Stuart Mill leugnet Existenz und Möglichkeit einer solchen Wissenschaft. Ihm zufolge ist die Folgerung von Allgemeinem auf Besonderes keine ursprüngliche und unzerlegbare Art des Schließens.

Zunächst verlangt er das Zugeständnis, dass in dem Syllogismus, wie er gewöhnlich aufgefasst wird, immer eine petition principii stecke. Wenn man sagt:

Alle Menschen sind sterblich,
Sokrates ist ein Mensch
Also ist Sokrates sterblich,

so ist der Schlusssatz in der ersten Prämisse mitenthalten. Wir können der Sterblichkeit aller Menschen nicht versichert sein, wenn wir nicht bereits der Sterblichkeit eines jeden einzelnen Menschen versichert sind. Sagt man: die Sterblichkeit des Sokrates ist so lange zweifelhaft, bis sie aus dem Obersatze gewonnen ist, so ist ebendamit dieser selbst für unsicher erklärt und kann mithin nicht dazu dienen, den Schlusssatz zu begründen. Der allgemeine Satz ist so wenig ein Beweis des besonderen, dass er selber nicht für wahr hingenommen werden kann, wenn auch nur der Schatten eines Zweifels an einem der in ihm enthaltenen Fälle haftet. Daher kann kein Schluss vom Allgemeinen auf das Besondere als solcher etwas beweisen, weil man

aus einem allgemeinen Satz nur die besonderen Fälle folgern kann, welche jener als bekannt voraussetzt.

Dennoch scheint uns der Syllogismus tatsächlich an jedem Tage die Kenntnis noch nicht beobachteter Wahrheiten zu verschaffen. Er hat mithin eine Schlusskraft, deren Natur man nur in Folge der künstlichen Formeln, durch welche sie entstellt war, verkannt hat. Es ist unbestreitbar, dass der Satz: der Herzog von Wellington ist sterblich, ein Schluss ist. Kann man ihn aber aus dem Satze: alle Menschen sind sterblich, gewinnen? „Ich antworte nein. Der Irrtum liegt meines Erachtens darin, dass man den Unterschied übersieht zwischen dem folgernden und dem registrirenden Teil des Denkprocesses und dem letzteren die Function des ersteren zuschreibt. Der Irrtum besteht darin, dass man den Ursprung von jemandes Kenntnissen auf seine Notizen zurückführt. Wenn jemand auf eine an ihn gerichtete Frage nicht sofort die Antwort findet, so kann er seinem Gedächtnis zu Hülfe kommen, indem er sich an ein Notizbuch wendet, das er in der Tasche trägt. Fragt man ihn aber, wie die Tatsache zu seiner Kenntnis gekommen ist, so wird er höchst wahrscheinlich nicht sagen: weil sie in seinem Taschenbuch notirt war.“[1])

Was ist denn nun ein allgemeiner Satz? Nichts anderes als ein kurzer Abriss unserer Beobachtungen sowol als der Folgerungen, welche wir daraus gezogen haben. „Wenn wir aber aus dem Tode des Hans, des Peter und jedes anderen Menschen, von dem wir gehört haben, schliefsen, dass der Herzog von Wellington sterblich ist, können wir sicherlich den allgemeinen Satz, dass alle Menschen sterblich sind, als Zwischenstation nehmen; aber nicht in der zweiten Hälfte des Weges, welche von allen Menschen zu dem Herzog von Wellington herabführt, liegt die Folgerung; die Folgerung ist da, sobald wir ausgesagt haben, dass alle

---

[1]) Mill, *System der deductiven und inductiven Logik.* Buch II. Kap. 3.

Menschen sterblich sind.[1])“ Die Gewär der Sterblichkeit des Herzogs von Wellington ist die Sterblichkeit des Hans, des Peter, des Jacob und jedes anderen uns bekannten Menschen, und wenn wir nun auch zwischen die erste und die zweite Stufe des Schlusses eine Verallgemeinerung einschalten, so hat doch der Beweis als solcher nichts davon.

Welches ist also die wirkliche Function des Syllogismus? Alle ursprünglichen Folgerungen, haben wir gesehen, gehen von Einzelnem auf Einzelnes. Die allgemeinen Sätze sind bloſse Verzeichnisse der bereits gemachten Schlüsse und kurze Formeln zu dem Zwecke, neue zu machen. Wenn wir, wie es bei dem Syllogismus der Fall ist, einen dieser Sätze zum Ausgangspunkte nehmen, was kann der Schlusssatz, den man daraus zu gewinnen glaubt, anders sein als eine Interpretation? In der Tat kann man ohne eine petitio principii nicht sagen, dass der Schluss aus der Formel gezogen ist; man muss sagen, dass er in Übereinstimmung mit der Formel gemacht ist. Die wirkliche Prämisse oder besser das logische Antecedens des Schlusssatzes ist die Summe der Einzeltatsachen, aus welchen die Induction den allgemeinen Satz gewonnen hat. Diese besonderen Fälle haben wir vergessen können; statt ihrer bleibt uns ein kurzes Verzeichnis, welches uns daran erinnert, dass gewisse Attribute uns allemal in Verbindung mit gewissen anderen Attributen begegnet sind, und uns dadurch in den Stand setzt, von dem Dasein der einen auf das Dasein der anderen zu schlieſsen. Die Folgerung aber hat in Wahrheit stattgefunden zwischen den vergessenen, in der allgemeinen Formel verdichteten Tatsachen und der besonderen Tatsache, um welche es sich handelt. Der Syllogismus ist somit durchaus ein Schluss von Einzelnem auf Einzelnes, dessen Bürgschaft in dieser vorangegangenen Folgerung von dem Einzelnen auf das Allgemeine liegt.

Es folgt hieraus, dass man seine allgemeinen Formeln zu modificiren hat. Jedes wirkliche Urteil sagt aus, dass ein

---

[1]) a. a. O.

gegebenes Object irgend ein Attribut entweder besitzt oder nicht besitzt, oder dass zwei Attribute oder Gruppen von Attributen coexistiren oder nicht coexistiren. Wenden wir dieses Princip auf die beiden Vordersätze eines Syllogismus an: der, immer allgemeine, Obersatz sagt aus, dass alle Dinge, welche ein gewisses Attribut haben, gleichzeitig gewisse andere Attribute haben oder nicht haben; der Untersatz sagt aus, dass das Ding oder die Dinge, welche das Subject dieser Prämisse bilden, das an erster Stelle in dem Obersatze genannte Attribut besitzen, und der Schlusssatz, dass sie das zweite haben oder nicht haben. Verallgemeinern wir das Verfahren, so werden wir sehen, dass alle Syllogismen folgenden Gesetzen unterworfen sind: Dinge, welche mit einem andern Dinge coexistiren, coexistiren untereinander; ein Ding, das mit einem anderen coexistirt, mit welchem ein drittes nicht coexistirt, coexistirt mit diesem dritten nicht. Und wenn wir die allgemeinen Sätze nicht als einen Teil unserer Erkenntnis, sondern als praktische Hülfsmittel betrachten: Alles was ein Merkmal besitzt, besitzt das, wovon jenes ein Merkmal ist; oder wenn der Untersatz wie der Obersatz universell ist: Alles was ein Merkmal eines Merkmals ist, ist ein Merkmal von dem, wovon das letztere ein Merkmal ist.

Es würden demnach die allgemeinen Typen des Syllogismus die folgenden sein:

Das Attribut A ist ein Merkmal des Attributs B
Das gegebene Object hat das Merkmal A,
Also hat das gegebene Object das Merkmal B. —
Das Attribut A ist ein Merkmal von der Abwesenheit des Attributs B.
Das gegebene Object hat das Merkmal A,
Also hat das gegebene Objekt das Attribut B. nicht.

II. Lebhafter noch als Stuart Mill hat Herbert Spencer die alte formale Logik angegriffen.[1]) Seine Definition

[1]) Vergl. *Principles of psychol.* Teil 6., Kap. 2—8. (Französisch von Ribot und Espinas.)

der Logik beruht auf seiner Unterscheidung der Gesetze der äufseren und der inneren Correlationen, einer Unterscheidung, welche ihrerseits die Folge ist seiner grundlegenden Lehre von der Correspondenz der Innen- und der Aufsenwelt und der beständigen Unterordnung jener unter diese.[2]) Die als objectiv, d. h. als aufserhalb unseres Bewusstseins liegend betrachteten Dinge stehen untereinander in gewissen Beziehungen der Zeit, des Raumes, der Zal, der Eigenschaften u. s. w. Ebenso haben unsere Vorstellungen von diesen Dingen gewisse, jenen parallele, jedoch abgeleitete und unursprüngliche Beziehungen untereinander. Wir haben somit zwei Verhältnisreihen, eine äufsere und eine innere. Die Logik hat die erstere zum Gegenstande und ist daher in demselben Sinn wie die Mathematik eine Wissenschaft der objectiven Existenz; sie sagt notwendige Verbindungen zwischen den Dingen und nicht zwischen den Gedanken aus; wenn sie zuweilen auch diese letztere Function erfüllt, so tut sie das nur in zweiter Reihe und nur sofern die Verbindungen der Gedanken denen der Dinge entsprechen und nach ihnen geformt sind; sie kann aber nicht, wie man gewollt hat, eine Wissenschaft der Gesetze des Denkens sein.

Die Beweise für diese kühne Behauptung können aus der formalen Logik selbst hergenommen werden. Die Logiker verwenden lieber als concrete Begriffe Zeichen und Symbole, welche jede beliebige Art des Seienden auszudrücken vermögen. Von da zu dem Schlusse, dass es die Logik lediglich mit den Gesetzen zu tun hat, nach denen diese abstracten Zeichen und Symbole sich, von jedem möglichen Inhalte abgesehen, vereinigen und trennen, ist nur ein Schritt, und dieser Schritt ist von den Theoretikern der formalen Logik gewagt worden. Ihre Entdeckungen aber sprechen gegen sie. De Morgans Lehre vom quantificirten Syllogismus, Booles abgebraische Methoden, Stanley Jevons'

---

[2]) Vergl. Th. Ribot, *la Psychologie anglaise contemporaine.* Herb. Spencer.

logische Maschine legen Zeugnis ab zu Gunsten der Ansicht, dass die Logik sich auf die Zusammenhänge unter den Dingen bezieht, nicht auf die correlaten Zusammenhänge unter unsern Bewusstseinszuständen. Haben wir es ja doch in keiner dieser Verfahrungsweisen mit dem Denken selbst, sondern ausschliefslich mit reciproken Beziehungen aufserhalb des Bewusstseins liegender Dinge zu tun.

Die erste Folge dieser Theorie ist die, dass der Syllogistik jeder Wert genommen wird. Herbert Spencers Angriffe auf den Syllogismus sind äufserst originell. Tatsächlich denken wir nicht immer in Syllogismen. Wenn es Wahrheiten gibt, welche wir mit Hülfe zweier Prämissen zu gewinnen scheinen, so gibt es andere, zu denen wir bald auf einfacherem, bald auch auf verschlungenerem Wege gelangen. So ist es mit jenen elementaren Urteilen, welche wir spontan erschliefsen, so andrerseits mit jenen Folgerungen, die wir aus einer Vielheit mannigfaltiger Verhältnisse gewinnen. Weder jene noch diese lassen sich, welche Gewalt man ihnen auch antun wolle, in den hier zu weiten, dort zu engen, Rahmen des Syllogismus einpassen, der uns somit an den beiden Endpunkten der Reihe der Schlüsse im Stich lässt.

Aber auch wenn man ihm engere Grenzen anweist, ist er die wirkliche Form des Schlussverfahrens? Man nehme folgenden Syllogismus:

Alle Krystalle haben eine Spaltfläche,
Dies Ding ist ein Krystall,
Also hat dies Ding eine Spaltfläche.

Stellt diese Urteilsreihe die tatsächliche Ordnung dar, in welcher unsere Gedanken zum Zweck der Schlussbildung auf einander folgen? Kann man mit irgend welcher Wahrscheinlichkeit behaupten, dass ich, bevor ich an diesen Krystall gedacht, an alle Krystalle gedacht habe und vom Allgemeinen zum Besonderen hinabgestiegen bin? Es würde das ein zufälliges und durchaus unerklärliches Zusammentreffen sein. In Wahrheit hat die Vorstellung dieses Krystalles meinem Gedanken an alle Krystalle

vorangehen müssen, und es hat mir daher ein Element der Conclusion eines der allgemeinen Elemente des Obersatzes an die Hand gegeben.

Stellt man, um dem Einwand zu entgehen, die Prämissen um, so erhebt sich die Frage: Wie kommt es, dass mich die Vorstellung dieses individuellen Krystalls an alle Krystalle denken lässt und nicht an jede andere Klasse? Wie kommt es, dass ich, sobald ich an die Krystalle denke, an ihre Spaltfläche und nicht an ihre Winkel, Axen oder sonstigen Eigenschaften denke? Die Antwort ist: Weil ich, noch ehe ich an das allgemeine Urteil: alle Krystalle haben Spaltflächen, dachte, bereits bemerkt habe, dass dieser Krystall diese Eigenschaft besitzt. Allerdings sind es meine früheren Erfahrungen hinsichtlich der Krystallspaltung, welche mich veranlassen, an die Spaltfläche dieses besonderen Krystalls zu denken; die Erinnerung an diese Erfahrungen tritt aber nicht vor der Beobachtung des individuellen Falles ein; sie haben eine Tendenz in mir zurückgelassen, welche mich in dem wahrgenommenen Krystall die Spaltfläche mehr als jedes andere Attribut ins Auge fassen lässt; darum denke ich an den allgemeinen Satz, den der besondere mir eingibt, und von jenem kehre ich zu diesem zurück. Psychologisch enthält der deductive Schluss drei Momente nach einander, die Folgerung aber liegt nicht in der Rückbewegung von dem allgemeinen zu dem besonderen Urteil. Der Syllogismus drückt somit den Process, vermöge dessen man den Schlusssatz gewinnt, nicht aus.

Jede Deduction hebt mit einem unwillkürlich erschlossenen Verhältnis an. Daraus folgt, dass jeder Schluss wesentlich inductiv ist. Es kann nicht anders sein, wenn die Logik die Dinge nach ihrer objectiven Auffassung zum Gegenstande hat.

Der ursprüngliche und nicht weiter analysirbare Modus der Induction ist das, was Mill den Schluss vom Besonderen auf das Besondere genannt hat. „Darauf lassen sich Deduction sowol wie Induction zurückführen, wenn

man die Zal der ausgesagten und beobachteten Vorgänge stetig vermindert. In diesem Verfahren begegnen sich beide auf halbem Wege, es ist gleichsam die gemeinschaftliche Wurzel, aus welcher beide hervorwachsen. Kinder und höhere Tiere befolgen es beständig, und wir haben in ihm die Vergleichung der Verhältnisse in ihrer einfachsten Form . . . . In diesem primitiven Schliefsen sind sowol die als Prämissen dienenden wie die gefolgerten Verhältnisse einzelne. Der geistige Act ist eine unmittelbare Erkenntnis der Ähnlichkeit oder der Verschiedenheit zwischen zwei Verhältnissen. Das Kind, welches sich gebrannt hat und das, nachdem es einmal den Zusammenhang der Gesichtswahrnehmung des Feuers und der schmerzhaften Empfindung, welche das Feuer auf der Haut hervorbringt, erfahren hat, die dem Feuer genäherte Hand zurückzieht, trägt in sich die Vorstellung eines Verhältnisses zwischen dem Feuer und der Verbrennung, welche in allen Stücken dem zuvor wahrgenommenen Verhältnis gleich ist. Das künftige Verhältnis, denkt es, wird eine Wiederholung des früheren sein. Es sieht oder vielmehr vermutet, dass die beiden Verhältnisse gleich sind. An diesem rudimentären Schlussverfahren, dem allereinfachsten und unvollkommensten, können wir deutlich erkennen, dass das als Prämisse dienende Erinnerte ein Verhältnis ist; dass das als Folgerung Vorgestellte ebenfalls ein Verhältnis ist; dass die Wahrnehmung des einen Gliedes dieses gefolgerten Verhältnisses (Feuer), die Vorstellung des anderen (Verbrennung) herbeiführt; dass das so vorgestellte Verhältnis vorgestellt wird nur auf Grund einer vorangegangenen Erfahrung der zwischen Feuer und Verbrennung stattfindenden Beziehung, und dass somit das neue Verhältnis, eben vermöge der Bedingungen seiner Entstehung, einem vorher kennen gelernten gleich vorgestellt wird. Und es ist klar, dass, wenn die Erfahrungen sich wiederholen, der Denkact, durch welchen die Conclusion gewonnen wird, im Grunde immer der nämliche bleibt.“[1])

[1]) *Principles of psych.* Teil 6. Kap. 7.

Das Vorstehende enthält eine Skizze der Theorie des Schlussverfahrens im allgemeinen. Tatsächlich beginnt jedes Schlussverfahren mit einer vorläufigen Folgerung. Die Erscheinung eines Dinges *a* gibt uns den Gedanken ein, dass dieses Ding irgend ein unsichtbares Attribut *b* besitzt. Zu diesem einfachen und unwillkürlichen Act bedarf es nicht erst der Erinnerung an die früher kennen gelernten gleichen Verhältnisse, er ergibt sich vielmehr einfach aus dem Einfluss dieser vorhergegangenen Erfahrungen auf die Association der Vorstellungen. Im gewöhnlichen Leben genügt der so hervorgerufene Schlusssatz meistens, und wir gehen zu anderen Gegenständen über. Man teilt mir z. B. mit, dass Herr H., welcher 84 Jahr alt, ist, sich ein neues Haus baut; sofort antworte ich, es sei töricht, in solchem Alter zu bauen. Um an den nahen Tod des Herrn H. zu denken, habe ich nicht zuvor den Satz: „Alle Menschen sind sterblich" wiederholt. Vielmehr hat die frühere Erfahrung mich die Vorstellung eines nahen Todes mit der Vorstellung des hohen Alters des Herrn H. verbinden lassen, und diese Verbindung reichte hin, um meine Antwort hervorzurufen.

Erhebt sich aber im Geiste irgend ein Zweifel in Betreff der unwillkürlich hervorgebrachten Conclusion, so wende ich mich, um ihn zu zerstreuen, zu der allgemeinen Formel, in welcher alle früher beobachteten Fälle der Verhältnisse von *a* und *b* kurz zusammengefasst sind. Ich verschaffe mir so die Gewissheit, dass die besondere Beziehung, die den Gegenstand meiner jetzigen Beobachtung und Folgerung bildet, jenen allgemeinen Beziehungen gleich ist, und schliefse daraus, dass jene richtig ist. Unser Schlussverfahren ist daher die Feststellung eines bestimmten Verhältnisses durch Vergleichung mit vorher bestimmten Verhältnissen.

Dass dies das Wesen des deductiven Schlussverfahrens ist, kann man a priori beweisen. Der Inhalt eines jeden aussagenden Satzes ist ein Verhältnis, mit anderen Worten: jeder aussagende Satz behauptet, dass etwas in bestimmter

Weise bedingt oder nicht bedingt gewesen ist und sein wird. Nun kann man aber ein Verhältnis nicht denken, wenn es nicht irgend einer Klasse zuvor erkannter Verhältnisse angehört. So angesehen ist das Schlussverfahren eine Classificirung von Verhältnissen. Verhältnisse classificiren heifst aber nichts anderes, als die gleichen zusammenordnen und von den ungleichen trennen. Wenn wir daher ein Verhältnis erschliefsen, müssen wir es notwendig als Teil oder Nicht-Teil irgend einer Klasse von Verhältnissen denken; es 'denken heifst somit denken, dass es gewissen anderen erkannten Verhältnissen gleich oder ungleich ist.

Noch präciser kann man so sagen: Wahrnehmung ist unmittelbare Erkenntnis eines Verhältnisses zwischen zwei Dingen, Schluss indirecte Feststellung eines bestimmten Verhältnisses zwischen zwei Dingen. Wie ist diese Feststellung möglich? Wenn ein Verhältnis zwischen zwei Dingen nicht direct erkannt wird, kann es dem Geiste nur vermittels bereits erkannter Verhältnisse offenbar werden. Also besteht das Schlussverfahren in der Feststellung eines bestimmten Verhältnisses zwischen bereits bestimmten Verhältnissen.

Es ergibt sich hieraus, dass die alten Formeln des Syllogismus der Berichtigung bedürfen. Wenn man, um ein ganz gewöhnliches Beispiel zu wälen, sagt: Alle gehörnten Tiere sind Wiederkäuer; dieses Tier ist gehörnt, also ist dieses Tier ein Wiederkäuer, so nimmt man gewöhnlich an, dass das drei Begriffe sind, die, je zwei und zwei, verglichen werden. Dies ist aber ein Irrtum, da das fragliche Tier nicht „dieselben" Attribute hat wie alle Tiere, sondern „gleiche" Attribute; also enthält der Syllogismus vier Begriffe, nicht drei, und besteht in der Auffindung der Gleichheit zweier Verhältnisse zwischen diesen parweise verbundenen Begriffen. In unserem Beispiel ist ein Verhältnis gegeben zwischen „gehörntes Tier" und „Wiederkäuer", ein zweites zwischen „dieses gehörnte Tier" und „dieser Wiederkäuer" Der Act des Schliefsens

besteht in der Wahrnehmung der Gleichheit des zweiten mit dem ersten Verhältnisse. Daher drückt folgende Formel: „das Verhältnis zwischen A und B ist gleich dem Verhältnis zwischen *a* und *b*," unsere logische Intuition richtig aus. In der Tat ist es augenscheinlich, 1) dass lediglich auf Grund der wahrgenommenen Ähnlichkeit von A und *a* (der Gruppe von Attributen, welche in dem Begriffe eines gehörnten Tieres enthalten sind, und der Gruppe von Attributen, welche dieses besondere Tier darbietet) die Conclusion gültig sein oder auch nur versucht werden kann; 2) dass die in dem Begriffe Wiederkäuer eingeschlossenen Attribute nur aus früherer Beschreibung oder Beobachtung bekannt sein können, und dass das Urteil, das in Rede stehende Tier besitze sie, bedeutet, dass diese Attribute zuvor erkannten Attributen gleich sind; 3) dass in dem vorliegenden Fall die Behauptung eines Verhältnisses der Coexistenz zwischen diesen und den durch den Ausdruck gehörntes Tier bezeichneten Attributen sich darauf gründet, dass sie gewissen früher erkannten Verhältnissen der Coexistenz gleich sind, da sonst die Aussage keine Wahrscheinlichkeit und noch weniger Gewissheit haben würde.[1])

Der Syllogismus ist demzufolge in Wahrheit eine auf Ähnlichkeit beruhende Proportion; die Wahrscheinlichkeit des Schlusssatzes wird je nach dem Grade der Ähnlichkeit der verglichenen Verhältnisse gröfser oder geringer sein. Sind die Dinge, die den Gegenstand des Denkens bilden, und die Verhältnisse, welche man vergleicht, von Natur identisch, und haben die Verhältnisse dieselbe Intensität, so ist der Schluss vollkommen. Dies ist der Fall bei den Bestimmungen des Raumes, der Zeit, der Zal, der Kraft, weil hier überall die Verhältnisse nach Art und Mafs gleich sein können; daher die besondere Sicherheit und Notwendigkeit der mathematischen Schlüsse. Denn da die

[1]) *Princ. of psych.* Teil 6. Kap. 7.

verglichenen Verhältnisse gleich und mithin ununterscheidbar sind, so ist kein Zweifel an der Gültigkeit der Ergebnisse möglich.

Wenn die Wahrnehmung gleicher Ausdehnung zwar fortfällt, aber doch zwischen den Begriffen Coexistenz und Artgleichheit, zwischen den diese Begriffe verbindenden Verhältnissen Gleichheit der Art und des Grades besteht, so hat, wenngleich die Zal der Gleichheitswahrnehmungen in dem Schlussverfahren vermindert ist, die Conclusion trotzdem noch immer eine an mathematische Gewissheit grenzende Kraft.

Wird die Zal der Gleichheitswahrnehmungen noch geringer, was der Fall ist, wo es sich um nacheinander eintretende Erscheinungen handelt, und bleibt nur Gleichheit in der Beschaffenheit der Dinge, mit denen man sich beschäftigt, und der verglichenen Verhältnisse, so nimmt die Wahrscheinlichkeit des Schlusssatzes im Verhältnis der Zal der entfallenden Gleichheiten ab.

Sie wird endlich noch geringer, sobald die Begriffe in den verglichenen Verhältnissen nicht einmal mehr gleich sind. In diesem Fall, der von allen der häufigste ist in den Schlüssen des täglichen Lebens, sind die zu einander in Beziehung gesetzten Einzeldinge nicht gleichartig, und die sie verbindenden Verhältnisse haben, wenn sie auch von gleicher Beschaffenheit sind, nicht dieselbe Intensität.

So reichen die verschiedenen Arten des Schlussverfahrens in unendlich kleinen Abstufungen von der Vergleichung unbedingt gleicher und demzufolge ununterscheidbarer bis zu der Vergleichung bloſs analoger Verhältnisse herab, aber an diesen beiden äuſsersten Punkten und auf allen Zwischenstufen ist das Verfahren selbst durchaus und immer die unmittelbare Erkenntnis einer mehr oder weniger vollständigen, mehr oder weniger ungenauen, Übereinstimmung.

---

## Kapitel III.

# Georg Bentham und Hamilton.

I. Die neue Analytik. — II. G. Bentham: Quantificirung des Prädicates. — III. Hamilton: Definition der Logik. — IV. Die formalen Denkgesetze. — V. Postulat der Logik. — VI. Quantificirung des Prädicates. — VII. Theorie des Urteils. — VIII. Conversion. — IX. Der Schluss im allgemeinen. — X. Schluss des Umfangs und des Inhalts. — XI. Induction und Deduction — XII. Unmittelbarer und mittelbarer Schluss. — XIII. Analytischer und synthetischer Schluss. — XIV. Unfigürlicher und figürlicher Schluss. — XV. Theorie der Schlussfiguren. — XVI. Theorie der Modi.

I. Der formalen Logik, wie Aristoteles ihre Principien hingestellt, ihr Gebiet umschrieben und ihre Gesetze formulirt hat, ist es eigentümlich ergangen, wie keinem anderen Werk des menschlichen Geistes. Denn während die anderen Wissenschaften stetig fortschreiten und zuweilen eine völlige Erneuerung erfahren, ist jene länger als zwei tausend Jahre unberührt geblieben und kaum dann und wann einer Verbesserung im einzelnen oder eines unerheblichen Zuwachses teilhaftig geworden. Erst in diesem Jahrhundert hat man daran gedacht, sie einer gänzlichen Revision zu unterziehen; man hat bei dieser Prüfung eine ungeheure Lücke in den Principien, einen daraus folgenden Mangel an Einfachheit und eine künstliche Anordnung zu entdecken geglaubt und den Versuch gemacht, ein vollständiges und endgültiges System an ihre Stelle zu setzen.

II. Der Ausgangspunkt der von den englischen Logikern des neunzehnten Jahrhunderts angestrebten Reform der formalen Logik ist die Lehre von der Quantificirung des Prädicates. Diese Lehre, welche, wie wir weiterhin des näheren darlegen werden, den Prädicaten aller Urteile eine bestimmte Quantität beilegt, ist beinahe gleichzeitig von Hamilton, Thompson und de Morgan gefunden und formulirt worden. Hamilton hat in einer berühmten Polemik gegen de Morgan die Priorität der Entdeckung für sich in Anspruch genommen. Er hatte bereits im Jahre 1833 die Notwendigkeit erkannt, das Prädicat der affirmativen Urteile zu quantificiren. Auf diesem Principe beruht seine Theorie der Induction, wie er sie in einem im April 1833 in dem Edinburgh Review veröffentlichten und in den „Discussions“ wiederabgedruckten Artikel dargelegt hat. Noch vor dem Jahre 1840 hatte er sich von der Notwendigkeit überzeugt, die Quantificirung des Prädicates auch auf die negativen Urteile auszudehnen. Er hatte aber einen Vorläufer gehabt, Georg Bentham.[1])

Man hat, und zwar mit Recht, für diesen Letzteren die Ehre einer Entdeckung in Anspruch genommen, welche eine Reihe denkwürdiger Arbeiten hervorrufen sollte.[2]) In der Tat, schon 1827 schrieb Georg Bentham Folgendes über die Urteile:

„Wenn die beiden Glieder eines Urteils collective Begriffe sind, so findet darin Gleicheit und Verschiedenheit statt

1) zwischen jedem beliebigen von den durch das eine Glied bezeichneten Einzeldingen und jedem beliebigen von

---

[1]) Georg Bentham ist der Neffe Jeremias Benthams. Aufser seinem *Outline of a New system of Logic*, 1827, hat man von ihm einen Essay über Nomenclatur und Classification. G. Bentham ist ein sehr verdienstvoller Botaniker.

[2]) Stanley Jevons, *Elementary Lessons on Logic*, und Lindsay, *On recent logical speculation in England*, in dem Anhang der englischen Übersetzung von Überwegs System der Logik, London 1871.

den durch das andere Glied bezeichneten Einzeldingen. Z. B. Gleichheit der gleichseitigen und der gleichwinkligen Dreiecke;

2) zwischen einem beliebigen von den durch das eine Glied bezeichneten Einzelbegriffen und einem beliebigen von einem Teil der durch das andere Glied bezeichneten. Z. B. Gleichheit der Menschen und der Tiere;

3) zwischen einem beliebigen nur von einem Teil der durch das eine Glied bezeichneten und einem beliebigen nur von einem Teil der durch das andere Glied bezeichneten Einzeldinge. Z. B. Gleichheit der vierfüſsigen und der schwimmenden Tiere.

Wenn ein Begriff auf jedes beliebige von den durch einen gemeinschaftlichen Namen bezeichneten Einzeldingen angewendet wird, ist er allgemein, wenn auf ein beliebiges nur eines Teils dieser Einzeldinge, partiell.

Demgemäſs können die Urteile folgende acht Formen haben, in welchen das Zeichen = die Gleichheit, das Zeichen || die Verschiedenheit, die Worte *in toto* die Universalität, die Worte *ex parte* die Particularität bezeichnen:

1. X in toto = Y ex parte;
2. X in toto || Y ex parte;
3. X in toto = Y in toto;
4. X in toto || Y in toto;
5. X ex parte = Y ex parte;
6. X ex parte || Y ex parte;
7. X ex parte = Y in toto;
8. X ex parte || Y in toto.

Da es aber in jeder Gleichung gleichgültig ist, mit welcher Seite man anfängt, sind die beiden letzten dieser acht Formen den beiden ersten gleich und können daher unberücksichtigt bleiben. Ebenso kann es die zweite bleiben, da die vierte dasselbe in einer für das deductive Verfahren geeigneteren Weise ausdrückt. Es bleiben somit folgende fünf Formen übrig:

1. X in toto = Y in toto;
2. X in toto = Y ex parte;

3. X in toto || Y in toto oder ex parte;
4. X ex parte = Y ex parte;
5. X ex parte ||·· Y ex parte;

„Die Logiker erwähnen die erste Form in der Regel nicht; sie halten sie für unnütz und sagen, das Prädicat sei niemals distribuirt, d. h. universell. Dies ist jedoch ein Irrtum. Zalreiche Fehler sind die Folge davon, dass man Begriffe für synonym hält, welche es in Wirklichkeit nicht sind, und es ist darum vorteilhaft, die vollkommene Gleichheit auf eine logische Form zu bringen.[1])“

Bentham hat somit die Notwendigkeit erkannt, dem Prädicat eine bestimmte, der des Subjects gleiche Quantität zu geben. Er war jedoch nur ein Vorläufer und übersah die Folgen seines Principes nicht. Diese sollte erst Hamilton entdecken und systematisiren.[2])

III. Was nun zunächst Hamiltons Auffassung der

---

[1]) *Outline of a new system of Logic*, Kap. 8.

[2]) Hamilton bezeichnete im Jahre 1846 als die Absicht der neuen Analytik: Vervollständigung und Vereinfachung der alten. „Sie will den Schlussstein in das aristotelische Lehrgebäude fügen. Von der abstracten Logik bleibt insbesondere die Theorie des Syllogismus da, wo das Genie des Stagiriten sie gelassen hat; wenn sie keinen Rückschritt gemacht hat, so hat sie noch weniger einen Fortschritt gemacht. Sie enthält die Wahrheit, aber nur einen Teil davon, und diesen nicht immer richtig, ohne Verwicklung und Verwirrung, dargelegt. Wie das? Weil Aristoteles, wunderbar genug bei seiner sonstigen Schärfe, zu früh mit der Analyse aufhörte und seine Synthese begann, ehe er die zu combinirenden Elemente völlig untersucht hatte. So wurde ein System, das sich beinahe von selber einheitlich und wolgeordnet entwickelt haben würde, mühsam und doch unvollkommen durch bloſsen Scharfsinn aufgebaut, mit einer Menge von Einschränkungen, Berichtigungen und Regeln, welche die Symmetrie desselben stören und dadurch den Wert der Wissenschaft ernstlich beeinträchtigt haben.“ *Logic* Appendix VI. — Baynes seinerseits erklärt, die neue Analytik rechtfertige ihren Namen dadurch, „dass sie ein Element des formalen Denkens entdeckt und in seinen verschiedenen Verhältnissen entwickelt hat, welches alle früheren Analysen nicht entwickelt, wenn nicht gar verkannt hatten.“ *An Essay* u. s. w. S. 74.

Logik betrifft, so muss man sich, um seine Definition derselben zu verstehen, an Kants Unterscheidung der Form und der Materie[1]) im Erkennen erinnern. Alles Gedachte enthält zwei, tatsächlich untrennbare, von Rechts wegen aber verschiedene und selbstständige Elemente: den rohen Stoff einerseits, das Ganze der Gesetze, nach welchen wir diesen Stoff zu Begriffen, Urteilen, Schlüssen verarbeiten, andererseits. Hamilton bezeichnet mit dem Worte denken ausschliefslich dieses zweite Element. Nicht also das Werk der Wahrnehmung, Einbildungskraft und Erinnerung ist ihm das Denken, vielmehr lediglich das Werk der Verstandestätigkeit, vermöge deren wir die uns von den vorstellenden Kräften gelieferten Materialien verarbeiten; es ist im Grunde Vergleichung, Analyse und Synthese[2]). In der Bildung der allgemeinen Begriffe vergleicht es, verbindet es und trennt es Attribute, im Urteil vergleicht, verbindet und trennt es Begriffe, im Schlusse endlich vergleicht, verbindet und trennt es Urteile. Die Logik ist die Wissen-

---

[1]) Hamiltons Theorien sind von ihm niemals vollständig und zusammenhängend dargestellt worden. Die von Mansel und Veitch nach seinem Tode veröffentlichten „*Vorlesungen über die Logik*" (dritte Auflage 1874) enthalten seine Lehre bei weitem nicht ganz; ebensowenig Baynes' *An Essay on the New Analytic of Logical Forms*, Edinburg 1850, (welcher den von Hamilton ausgesetzten Preis gewann), wie schon daraus ersichtlich ist, dass Hamilton am Ende dieser Schrift in einer leider kurzen Anmerkung einige von den Punkten bezeichnet, um welche er bei reiferem Nachdenken seine Theorien bereichert hat. (Übrigens sind die letzteren in dem Essay mit grofser Genauigkeit und Klarheit dargelegt.) Wer sich daher gründlich unterrichten will, muss zu den zalreichen Fragmenten seine Zuflucht nehmen, welche als Anhang zu den Vorlesungen von Mansel und Veitch veröffentlicht worden sind. Es sind das aber oft nur kurze Notizen, die der Verfasser auf das Papier geworfen hat, um ein andermal darauf zurückzukommen; oft auch ist ihre Entstehungszeit unbekannt. Es ist daher nicht leicht, Hamiltons endgültige Ansichten festzustellen und sie mit der systematischen Strenge darzulegen, welche er sich schmeichelte zuerst in die Logik eingeführt zu haben.

[2]) Vorlesung I.

schaft von den Gesetzen des Denkens als solchen.[1]) Damit ist gesagt, dass sie alles bei Seite lässt, was in naher oder entfernter Beziehung zum Inhalt des Erkennens steht, und dass sie von diesem nur die allgemeine Form betrachtet. Sie ist daher eine formale Wissenschaft. Sie befasst sich nicht im mindesten mit der wirklichen Existenz und ihren Beziehungen, sondern einzig und allein mit demjenigen Sein und denjenigen Beziehungen, welche unter den Bedingungen

---

[1]) Ein Schüler Hamiltons, Mansel, definirt in seinem *Prolegomena logica* die Logik ebenfalls als die Wissenschaft von den formalen Denkgesetzen. Materie ist alles, was dem Denken von aufsen kommt, Form „alles was in und durch den Denkact selbst eintritt.“ Mit dem Inhalt unserer mentalen Tätigkeiten hat die Logik nichts zu tun; es kümmert sie nicht, ob Begriffe, Urteile, Schlüsse einer Wirklichkeit entsprechen oder nicht, ihr einziger Gegenstand ist die allgemeine Beschaffenheit des Denkens. Sie erkennt daher als „logisch gültig“ alle Begriffe, Urteile und Schlüsse an, „welche den Grundgesetzen des Denkens nicht widerstreiten,“ indem sie es diesem oder jenem Teil der Naturwissenschaft überlässt, auszumachen, „ob jene Denkproducte durch das Zeugnis dieser oder jener besonderen Erfahrung verbürgt sind.“ — So definirt hat die Logik zwei Functionen, eine constructive und eine kritische. Die constructive Logik nimmt die drei formalen Denkgesetze, das der Identität, das des Widerspruches und das des ausgeschlossenen Dritten, und indem sie sie auf die Materialien, aus welchen Begriffe, Urteile und Schlüsse gebildet werden, anwendet, construirt sie formell d. h. unter ausschliefslicher Berücksichtigung des Verhältnisses der letzteren zu den Denkgesetzen, nicht zu der objectiven Wirklichkeit, diese drei Produkte des Denkens. Sie bedarf zu ihrer Tätigkeit der Materialien, sie könnte ohne Attribute keine Begriffe, ohne Begriffe keine Urteile, ohne Urteile keine Schlüsse construiren. Aber bei der Construction der Begriffe sieht sie nur darauf, ob die zu einem Begriffe vereinigten Attribute sich nicht widersprechen; die inhaltliche Richtigkeit einer solchen Construction geht sie nichts an, der Begriff: Centaur ist logisch ebenso correkt wie der Begriff Mensch. Bei den Urteilen untersucht sie lediglich, ob die verknüpften Begriffe nicht contradictorisch sind. Ein affirmatives und ein negatives Urteil sind logisch richtig, sobald Subjects- und Prädicatsbegriff mit einander verträglich, beziehungsweise nicht verträglich sind. Ebenso sieht die Logik bei den Schlüssen nur darnach, ob die zusammengefügten Urteile nichts contradictorisches enthalten. — Die kritische Logik prüft, ob die Begriffe, Urteile und Schlüsse in Übereinstimmung mit den Denkgesetzen gebildet sind.

des Denkens sich ergeben und von diesen ihre Regel empfangen. Sie weifs nichts von der Richtigkeit oder Falschheit der Urteile selbst, sie nimmt darauf keine Rücksicht. In der Logik ist alles richtig, was sich nicht widerspricht. Die Logik verbürgt weder die Prämissen noch die Conclusion, sondern lediglich den Schluss von jenen auf diese, denn schliefsen heifst nichts anderes als die Richtigkeit eines Urteils explicite aussprechen unter der Voraussetzung, dass andere Urteile, welche sie implicite enthalten, richtig sind.[1]) Kant hat die wahre Function der Logik ziemlich richtig erkannt, er hat sie aber nicht scharf und entschieden von allem Fremdartigen frei gemacht, da er ihr die modalen, durch die Notwendigkeit, Möglichkeit oder Zufälligkeit der Verknüpfung von Subjekt und Prädicat bestimmten Urteile gelassen hat; er hat sie so nicht vollständig von der Metaphysik unterschieden. Nur die Form der Erkenntnis ist ihr daher als Gegenstand zu geben. Die Form, die ganze Form, nichts als die Form, dies könnte ihr Walspruch sein.[2])

So definirt fällt die Logik weder, wie man glauben könnte, mit der Psychologie, noch mit dem zusammen, was seit Kant als Kritik bezeichnet wird. Alle Phasen des Denkens sind uns durch das Bewusstsein bekannt, und es könnte scheinen, als ob sie aus diesem Grunde alle gleichmäfsig zur Psychologie gehörten. Aber wiewol sie alle miteinander verbunden sind und nur die Analyse sie von einander trennen kann, sind dennoch die einen zufällig, die andern notwendig. Jene gehören, als Phänomene, „der sogenannten empirischen oder historischen Psychologie“ an.

---

[1]) *Discussions IV.* In demselben Stück sagt Hamilton: „Die Logik betrachtet die Dinge nicht, wie sie wirklich und an sich sind, sondern nur die allgemeinen Denkformen, unter welchen der Geist sie auffasst.“

[2]) Vgl. Baynes, *Essay*, „Die Logik betrachtet die Form, nicht den Inhalt des Denkens: jedoch tritt die Form nur auf irgend einen Inhalt angewendet in die Erscheinung, daher muss die Logik in ihren Beispielen irgend welchen Inhalt anwenden können.“ Vgl. Hamilton, *Logic*, Append. VI (*b.*).

Sobald die Abstraction aber von den zufälligen Betätigungen des Denkens die „notwendigen Formen," welche die Gesetze jener sind, getrennt hat, so ergibt sich eine Wissenschaft, welche sich von allen andern insofern unterscheidet, als sie diese notwendigen Formen zum Gegenstand nimmt.[1]) Dieser Gegenstand ist jedoch nicht der der Kritik. Denn diese will die organischen Bedingungen alles Gedachten auffinden, die notwendigen und fundamentalen Gesetze, welche bei jedem Schritt des Geistes wirksam sind. Dagegen betrachtet die Logik nicht die Denktätigkeit selbst, sondern ihre Producte; daher sind ihre allgemeinen Gesetze nicht das, was Kant die Formen a priori der Sinnlichkeit, die Verstandesbegriffe und die Vernunftideen genannt hat, sondern einzig und allein die Gesetze der Producte des Denkens, wie letzteres oben definirt worden ist.[2])

IV. Solcher fundamentalen Gesetze, welche in der Natur des denkenden Subjectes selbst und in nichts aufserhalb dieser liegendem — denn in diesem Fall würden sie zufällig sein — begründet sind, gibt es drei: das Gesetz der Identität, das des Widerspruchs und das des ausgeschlossenen Dritten.[3])

---

[1]) Vorlesung III.

[2]) Hamilton macht diesen Unterschied zwischen Logik und Kritik nirgends mit ausdrücklichen Worten, er macht jedoch einen nach seiner Terminologie dasselbe besagenden. „Wird die Form in Bezug auf das denkende Subject betrachtet, d. h. als ein Act, eine Operation, so gehört sie der phänomenalen Psychologie an. Wird sie in Bezug auf das Gedachte betrachtet, d. h. als das Product der Tätigkeit, alsdann gehört sie der Logik an." Vorlesung IV; und ebenda: „Die Logik betrachtet das Denken nicht als Tätigkeit, sondern als das Product des Denkens, sie handelt nicht von der Begriffs-, Urteils- und Schlussbildung, sondern von Begriffen, Urteilen und Schlüssen."

[3]) Vgl. Vorlesung V. In dieser Vorlesung nimmt Hamilton noch ein viertes Grundgesetz an, welches er das Gesetz von Grund und Folge oder auch das Gesetz des zureichenden Grundes nennt: „Das Denken eines durch positive oder negative Attribute charakterisirten Gegenstandes ist nicht dem Belieben des Verstandes überlassen; dieses Vermögen muss vielmehr zu diesem oder jenem Denkact durch etwas von dem Denkprocess selbst Verschiedenes und Un-

Das erste spricht die Unmöglichkeit aus, einen gegebenen Begriff und seine Merkmale als einander ungleich zu denken; es besteht unbedingte Gleichheit zwischen einem Ganzen und der Summe seiner Teile, zwischen einem Begriffe und der Gesamtheit der ihn bildenden Merkmale. Man kann daher sagen, dass jedes Ding sich selber gleich ist, oder A = A, A ist A. Dies ist das Prinzip jeder logischen Bejahung.

Das Gesetz des Widerspruches, richtiger des Nichtwiderspruches, besagt, dass zwei Behauptungen, von denen die eine verneint, was die andere bejaht, nicht zusammen gedacht werden können. Wenn ein Ding durch die Behauptung eines gewissen Merkmals bestimmt ist, so können wir es nicht mehr als dasselbe Ding denken, sobald dieses Merkmal von ihm verneint wird. Anders ausgedrückt: Was sich widerspricht, ist undenkbar; A = non A = O, oder A — A = O. Dies ist das Princip jeder logischen Verneinung.

Das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten, das Princip der logischen Disjunction, verlangt, dass von zwei contradictorischen Attributen nur eines einem Dinge beigelegt werden kann, und dass, sobald das eine explicite von ihm bejaht wird, das andere implicite von ihm verneint wird. [A ist entweder oder es ist nicht; A ist entweder B oder es ist nicht B.]

V. Die bezeichneten Gesetze sind die Bedingungen des Denkbaren. Wer sie leugnet, leugnet die Möglichkeit des Denkens. Die Logik hat aber außerdem noch ein Postulat, das sich mit Notwendigkeit aus ihrer Definition ergibt.

---

abhängiges genötigt sein. Diese Bedingung unseres Denkens findet ihren Ausdruck in dem sogenannten Gesetz des zureichenden Grundes (principium rationis sufficientis), welches besser als das Gesetz von Grund und Folge (principium rationis et consecutionis) bezeichnet wird." — [Später hat Hamilton dieses Gesetz als materiell mit dem Causalitätsgesetz zusammenfallend und insofern außerlogisch, formal als abgeleitet aus den drei anderen Gesetzen bezeichnet. Vgl. *Discussions* S. 160 Anm. und S. 603.]

Denn wenn ihr Gegenstand die Form, die ganze Form, nichts als die Form des Denkens ist, so kann sie ihre Aufgabe unmöglich lösen, wenn sie nicht den ganzen Sinn der von ihr betrachteten Begriffe, Urteile, Schlüsse vollständig ausdrücken darf. Es kann ja — wie später zu untersuchen sein wird — geschehen, dass die gewöhnliche Sprache nicht alles in dem Act und damit in dem Product des Denkens Enthaltene ausdrückt. Will man daher die Logik nicht zu unheilbarer Unvollkommenheit verurteilen, so muss man ihr gestatten, „alles in dem Denken implicite Enthaltene explicite in der Sprache auszudrücken." Nichts ist einfacher und berechtigter als diese Forderung, und doch haben die alten Logiker eben weil sie sie nicht gestellt haben, nur eine halbe Analyse des Gegenstandes ihrer Wissenschaft gegeben.

VI. Sehen wir in der Tat zu, was sich sofort aus diesem Postulat ergibt. Jedes Urteil besteht aus einem Subject und einem Prädicat, welche durch eine Copula verknüpft sind. Wir denken das Subject mit einer bestimmten Quantität, und aus dieser Quantität des Subjectes folgt die, in der Regel besonders ausgedrückte, immer aber mitgedachte Quantität des ganzen Urteils. Wird denn aber nur das Subject als quantificirt gedacht, das Prädicat allemal und notwendig als quantitativ unbestimmt? Allerdings steht in der Mehrzal der Fälle keine genaue Quantitätsbezeichnung bei dem letzteren; man sagt z. B.: alle Menschen sind sterblich, ohne nähere Angabe, ob man alle Sterbliche oder nur einige meint. Doch aber quantificirt die Sprache auch das Prädicat in zalreichen Fällen. Wir setzen zu diesem Zwecke die Wörter ganz, einige, oder ihnen gleichwertige hinzu oder bedienen uns auch limitirender Wendungen. Wir sagen z. B.: Unter den Tieren ist der Mensch allein vernünftig, der Glaube allein rechtfertigt; oder: auf der Erde ist nichts groſs als der Mensch, im Menschen nichts als der Geist.

Sind das Ausnahmen in der Auffassung, wie es Ausnahmen im sprachlichen Ausdruck sind? Oder wird vielmehr

das Prädicat eines jeden Urteils mit einer bestimmten Quantität gedacht, welche die Logik demzufolge überall auszudrücken hat? Um diese hochwichtige Frage beantworten zu können, müssen wir den Act, durch welchen wir ein Prädicat mit einem Subject verbinden, ins Auge fassen. Ein Begriff ist die Vorstellung des gemeinsamen Merkmals oder der Gesamtheit der gemeinsamen Merkmale einer Mehrheit von Einzeldingen. Er setzt daher voraus: die Wahrnehmung und Vergleichung einer Mehrheit von Dingen, die Anerkennung gleicher Elemente in ihnen und die subjective Verbindung dieser Elemente. Ein Begriff ist mithin ein rein ideales Ganze, welches der Geist bilden muss, um die mannigfachen Gegenstände einer Erkenntnis denkend zu ordnen und sprachlich zu sondern. Was heifst nun einem Subject ein Prädicat beilegen? Es heifst nichts anderes als dieses Subject, sei es nun ein Einzelding oder ein Begriff, unter oder in einem gegebenen Begriffe denken. Sagt man z. B. „der Mensch ist ein Tier," so stellt man den Begriff Mensch unter den Begriff Tier.

Wenn wir nun aber auf diese Weise etwas unter einen Begriff stellen, d. h. behaupten, dass es zu dieser oder jener Klasse gehöre, so müssen wir wissen, dass es darin einen bestimmten Platz einnimmt, da wir sonst nicht befugt sein würden, es in die betreffende Klasse zu stellen. Wenn wir z. B. nicht wissen, dass der Begriff Mensch einen bestimmten Platz in dem Begriff Tier einnimmt, so haben wir nicht das Recht, den zweiten von dem ersten auszusagen, d. h. den ersten in den zweiten eintreten zu lassen. Ja noch mehr. Wir müssen, um einen Begriff in einem anderen, oder ein Object unter einem Begriffe zu denken, nicht nur wissen, dass der eine ein Teil des anderen ist, wir müssen auch genau angeben können, wieviel er von dem letzteren ausmacht. Ist doch ein jeder Begriff eine künstliche Denkeinheit; sein Umfang ist gleich der Summe der Dinge, deren gemeinsame Elemente er ausdrückt; andererseits heifst ein Ding denken, es in einen Begriff aufnehmen; wir müssen daher, wenn wir es denken,

den von ihm in der Klasse, auf welche es bezogen wird, eingenommenen Raum mit Genauigkeit bestimmen.[1])

Das Prädicat ist mithin immer und notwendig mit einer bestimmten, der des Subjectes gleichen, Quantität gedacht. Dem Postulat der Logik zufolge müssen wir daher allemal diese mitgedachte Quantität ausdrücklich angeben. Wenn die Sprache es gewöhnlich nicht tut, so erklärt sich das daraus, dass sie nur darauf aus ist, das Gedachte, nicht aber, oder doch nur nebenher, das Wie des Denkens auszudrücken; sie hat es mit dem Inhalt, nicht mit der Form der Erkenntnis zu tun, und sie scheidet daher aus dem Ausdruck alles zum klaren Verständnis des Gedachten nicht durchaus Notwendige aus. Die Logik dagegen muss, will sie anders ihr Ziel nicht verfehlen, ein strengeres Verfahren beobachten, sie muss alles in dem Denken implicite Enthaltene mit voller Ausführlichkeit aussprechen und daher auch den Prädicaten aller Urteile eine bestimmte Quantität beilegen.

Die Quantificirung des Prädicates ist das Grundprincip der neuen Analytik; sie allein ermöglicht eine vollständige Analyse der logischen Wissenschaft. Weil die Alten sie nicht erkannt oder verkannt haben, haben sie die Logik nur einseitig entwickelt und sie mit zalreichen, nutzlosen und widerspruchvollen Regeln überladen.

VII. Die erste Folge dieses Principes ist eine wichtige Reform der Theorie des Urteils. Die alte Analytik erkennt vier nach Qualität und Quantität verschiedene Arten des Urteils an: die allgemein bejahenden, die particular bejahenden, die allgemein verneinenden, die particular verneinenden. Die neue Analytik erkennt auf Grund der Quantificirung des Prädicates vier Arten bejahender und vier Arten verneinender Urteile an:

1) Die bejahend toto-totalen, in welchen Subject und Prädicat in ihrem ganzen Umfang gelten, z. B. Jedes Dreieck ist jedes Dreiseitige.

[1]) Vgl. Baynes, *An Essay*, S. 5 ff.

2) Die bejahend toto-partiellen, in welchen das Subject allgemein, das Prädicat particular gilt, z. B. Alle Dreiecke sind einige Figuren.
3) Die bejahend parti-totalen, in welchen das Subject particular, das Prädicat allgemein ist, z. B. Einige Figuren sind alle Dreiecke.
4) Die bejahend parti-partiellen, in welchen Subject und Pradicat particular sind, z. B. einige gleichseitige Figuren sind einige Dreiecke.
5) Die verneinend toto-totalen, in welchen das Subject seinem ganzen Umfange nach von dem ganzen Umfang des Prädicates ausgeschlossen wird, z. B. Kein Dreieck ist kein Viereck.
6) Die verneinend toto-partiellen, in welchen das ganze Subject nur von einem Teil des Prädicatsumfanges ausgeschlossen wird, z. B. Keine Dreiecke sind einige gleichmäfsige Figuren.
7) Die verneinend parti-totalen, in denen nur ein Teil des Subjectsbegriffes von dem ganzen Umfang des Attributes ausgeschlossen wird, z. B. Einige gleichseitige Figuren sind kein Dreieck.
8) Endlich die verneinend parti-partiellen, in denen ein Teil des Subjectsumfanges nur von einem Teil des Prädicatsumfanges ausgeschlossen wird, z. B. Einige Dreiecke sind nicht einige gleichseitige Figuren.

So ist jedes Urteil, jeder Satz im Grunde ein Quantitätsverhältnis zwischen dem gegebenen Subjecte und dem gegebenen Prädicate. In den affirmativen wird Gleichheit zwischen beiden ausgesagt, und jeder bejahende Satz ist zuletzt eine Gleichung. In den negativen Sätzen wird dagegen ausgesagt, dass es unmöglich ist, aus Subject und Prädicat eine Gleichung zu machen.[1])

---

[1]) Die Logiker, welche Hamilton folgen, besonders Thompson nnd Spaldiug, verwerfen seine Erweiterung der negativen Formen, sie halten das Prädicat in den verneinend toto-partiellen und parti-partiellen Formen für allgemein. Wenn in dem Urteil „keine Men-

VIII. Die gewöhnliche Lehre von der Umkehrung der Urteile erfährt hierdurch eine erhebliche Vereinfachung. Die alte Logik kennt drei Arten der Umkehrung: die einfache Umkehrung ohne Veränderung der Qualität und der Quantität für die allgemein verneinenden Urteile, die Umkehrung *per accidens* für die allgemein bejahenden Urtheile, wobei die Qualität unverändert bleibt, während die Quantität particular wird; endlich die Umkehrung *per contrapositionem*, die am meisten verwickelte von allen, wo Subject und Prädicat, indem sie ihren Platz vertauschen, aus positiven negativ werden.

Eine vollständige Analyse aller Elemente des Urtheils beseitigt diese Mannigfaltigkeit der Umkehrungsarten. Wenn das Prädicat eines jeden Urteils quantitativ bestimmt ist, und diese Quantität der des Subjectes genau gleich ist, so verhalten sich Subject und Prädicat in den affirmativen Urteilen zu einander wie die beiden Seiten einer Gleichung, es ist gleichgültig, ob das eine oder das andere rechts oder links von der Copula steht, die Vertauschung des Platzes verändert ihren Wert nicht. Ebenso kommt in den negativen Urteilen, sobald das Prädicat auch da quantificirt ist, d. h. wenn explicite ausgesagt wird, dass das Subject von dem ganzen Prädicat oder nur einem Teil desselben ist, wenig darauf an, welchen Platz die beiden haben und somit gibt es der neuen Analytik zufolge nur eine Art der Umkehrung: conversio simplex.

IX. Durch die Anwendung der Lehre von der Quantificirung des Prädicates auf die Theorie des Schlusses muss diese, wie leicht ersichtlich ist, in hohem Grade vereinfacht werden. Ist doch das Einzige, worauf die Logik hier zu achten hat, die Quantität des Subjectes und die

schen sind einige Arten Tiere“ die Tierarten, von denen der Mensch ausgeschlossen wird, specifisch definirt werden können, und logisch können sie es, so kommt das Urteil auf die übliche Form hinaus. Ebenso in dem Urtheile: einige X sind nicht einige Y; einige Menschen sind nicht einige Säugetiere. Sind die einigen Säugetiere specifisch bestimmbar, so haben wir die alte Form O, in der das Prädicat allgemein ist. Vgl. Thompson, An *Outline* unter §. 78 ff; A. Bain, *Logic ded. und ind.* T. I. S. 133 (der franz. Übersetzung).

des Prädicates. Wenn das Prädicat immer quantitativ bestimmt gedacht und die quantitative Bestimmung desselben ausgedrückt wird, wenn diese der des Subjectes gleich ist, d. h. wenn das Urteil schließlich eine Gleichung ist, so geht alles Schließen von gleichen Quantitäten auf gleiche Quantitäten, ist jeder Syllogismus im Grunde eine Reihe von Gleichungen mit äquivalenten Ausdrücken. Die logischen Unterscheidungen des Ober-, Mittel- und Unterbegriffes, des Ober- und Untersatzes und der Figuren fallen fort, und der Typus eines jeden Schlusses ist: $A = B$, $B = C$, also $A = C$.

Hamilton hat diese äußerste Folgerung jedoch nicht gezogen[1]) und in seiner Schlusslehre die Urteile keineswegs als einfache Gleichungen behandelt. Er bezeichnet das Wesen des Schlussverfahrens folgendermaßen: „Der logische Schluss ist durch die subjective Beziehung von Grund und Folge bestimmt, unter welche die Begriffe der Prämissen im Denken gestellt werden. Der als bestimmend aufgefasste Begriff ist der Grund oder das Antecedens, der als bestimmt aufgefasste ist das Consequens. Es können aber zwei Begriffe in dem formellen Verhältnis von Grund und Folge nur so gedacht werden, dass entweder der bestimmende Begriff als ein den bestimmten enthaltendes (und darum notwendig bedingendes) Ganze aufgefasst wird, der bestimmte als der enthaltene Teil, oder aber der bestimmende Begriff muss aufgefasst werden als die den bestimmten bildenden (und darum notwendig bedingenden) Teile, der bestimmte als das durch diese Teile gebildete Ganze.“ [2]) Kurz ausgedrückt, der Schluss geht von dem Ganzen auf die Teile, oder von den Teilen auf das Ganze.

[1]) Er hat sie aber wol geahnt. Wenigstens liest man in einem undatirten Bruchstück des Anhangs VI. der Vorlesungen über die Logik: „Das große Ergebnis der Lehre ist das folgende: Subject und Prädicat im Urteil, im kategorischen Schlusse, terminus major und minor, Ober- und Untersatz, 1te, 2te, 3te, 4te Figur und ebenso der nichtfigürliche Schluss sind miteinander vertauschbar, und jede Umkehrung lässt sich auf eine einfache Gleichung zurückführen.“

[2]) *Discussions IV.*

X. Man hat daher von vorn herein zwei Arten des Schlusses zu unterscheiden. An sich ist zwar das Ganze mit seinen Teilen identisch, „für den Geist aber sind sie es nicht, denn im Denken (und die Logik hat nur die Gesetze des Denkens zum Gegenstand) kann man zuerst das Ganze auffassen und dieses alsdann vermöge einer geistigen Analyse in seine Teile teilen, oder man kann mit den Teilen anfangen und diese vermöge einer geistigen Synthese zu einem Ganzen vereinigen. Der logische Schluss zerfällt daher in zwei Arten und nur in zwei, er geht entweder von dem Ganzen auf die Teile oder von den Teilen auf das Ganze, und nur insofern etwas ein umschliefsendes Ganzes oder aber ein umschlossener Teil ist, kann es Glied einer logischen Schlussfolgerung sein.“[1]) Der Schluss ist deductiv, wenn er vom Ganzen zu den Teilen hinabsteigt, inductiv, wenn er von der Gesamtheit der einzeln aufgezälten Teile zu dem Ganzen aufsteigt, das sie bilden.

XI. Gewöhnlich versteht man unter Induction diejenige Denktätigkeit, vermöge deren wir aus einer beobachteten Tatsache das Gesetz dieser Tatsache erschliefsen, allgemein ausgedrückt: die Folgerung von dem Einzelnen auf das Allgemeine. Nach Hamilton gehört diese Operation gar nicht in die Logik. Diese hat es ausschliefslich mit den Formen des Denkens zu tun, während die Induction, wenn man sie, wie angegeben, definirt, mag sie immerhin eine Form — Analogie der Erfahrung, Glauben an die Beharrlichkeit der Naturgesetze und dgl. — voraussetzen, sich wesentlich mit dem phänomenalen Inhalt das Erkenntnis befasst. Neben dieser materiellen Induction gibt es aber eine formale, welche in die Wissenschaft von den Gesetzen des Denkens als solchen gehört und von Aristoteles ziemlich richtig erkannt worden ist. Diese ist die umgekehrte Deduction. Die letztere beruht auf dem Princip, dass was von dem Ganzen

---

[1]) *Discussions* IV.

gilt oder nicht gilt, von jedem der das Ganze bildenden Teile gilt oder nicht gilt. Kehren wir den Satz um, so haben wir das Princip einer umgekehrten, rein formalen Art des Schließens: was von allen ein Ganzes bildenden Teilen gilt oder nicht gilt, gilt oder gilt nicht von dem durch diese Teile gebildeten Ganzen. Jeder inductive Schluss kann und muss daher syllogistische Form mit drei Begriffen und zwei Prämissen annehmen;

x, y, z sind A,
A ist B
also x, y, z sind B.

Der einzige Unterschied von dem gewöhnlichen Syllogismus ist der, dass ein Terminus der Conclusion statt eines Ganzen oder eines Teiles eine Aufzälung von Teilen ist, eine Aufzälung, welche selbstverständlich vollständig sein muss. Bei der materiellen Induction, d. h. bei derjenigen, welche wir zur Erkenntnis der Naturgesetze anwenden, ist eine Aufzälung aller Teile oder aller gleichen Fälle offenbar unmöglich. Unsere Beobachtungen erschöpfen niemals die ganze Summe gleichartiger Tatsachen, nichtsdestoweniger aber schließen wir auf Grund etlicher beobachteter Tatsachen, ja sogar einer einzigen, auf das allgemeine Gesetz, welches sie beherrscht. Eine solche Operation findet jedoch in den formellen Gesetzen des Denkens keine Bürgschaft. In der Logik darf man unter dem Namen Induction nur den Schluss von der Gesamtheit der einzelnen Teile auf das durch sie gebildete Ganze gelten lassen. Ohne Frage ist diese Induction weniger fruchtbar als die materielle der Forscher; das aber verschlägt wenig: es gibt tatsächlich einen dem deductiven entgegengesetzten Schluss von den Teilen auf das Ganze, und wenn er auch noch so selten zur Anwendung käme, war es doch unerlässlich ihn anzuerkennen, seinen Charakter zu bestimmen und ihm seinen Platz in der formalen Logik anzuweisen.[1])

XII. Der Schluss geht von den Teilen auf das Ganze

[1]) Vorlesung XXVI, Anhang VIII, *Discuss.* IV.

oder von dem Ganzen auf die Teile. Das Ganze hat aber in der Logik zwei verschiedene Bedeutungen. Jeder Begriff hat zweierlei Quantitäten, welche einander gewissermaſsen entgegengesetzt sind; eine intensive und eine extensive Quantität oder anders ausgedrückt eine Comprehension und eine Extension, eine Connotation und eine Denotation. Die erstere ist die Summe der Attribute, welche von ihm ausgesagt werden können, die letztere die Summe der Dinge, von welchen er selbst ausgesagt werden kann. Die Logiker haben mit Ausnahme des Aristoteles (welche jedoch zweifelhaft ist) bei der Behandlung des Syllogismus immer nur die extensive Quantität ins Auge gefasst, alle ihre Regeln setzen voraus, dass das Subject des Urteils als Teil der durch das Prädicat bezeichneten Klasse aufgefasst wird. Das ist aber nur die Hälfte der Wahrheit. Beachtet man, von der extensiven absehend, die intensive Quantität der verknüpften Begriffe, so bildet umgekehrt das Prädicat einen Teil des Subjectes. Die Copula „ist“ hat somit zwei sehr verschiedene Bedeutungen; in einem Sinne bedeutet sie, dass das Subject in dem Prädicat enthalten ist, in dem anderen dagegen, dass das Subject das Prädicat enthält. So lässt sich der Satz: „der Mensch ist ein Tier“ auf doppelte Weise interpretiren, entweder: der Mensch bildet einen Teil der Klasse Tier, oder: die in dem Begriff Tier enthaltenen Attribute sind unter den in dem Begriff Mensch enthaltenen Attributen.

Hieraus folgt, dass die Bezeichnungen terminus major und terminus minor in der Logik nicht den absoluten Sinn haben, den man ihnen beilegt. Unter dem Gesichtspunkt der Extension ist das Subject der minor, das Prädicat der major, unter dem der Comprehension ist umgekehrt das Subject der major, da es ein gröſseres Ganzes ist als das darin enthaltene Prädicat, das Prädicat aber der minor.

Es stehen demgemäſs zwei Arten von Syllogismus nebeneinander, Syllogismen der Comprehension und Syllogismen der Extension oder, um mit einer Genauigkeit zu sprechen, welche vielleicht Hamiltons Gedanken nicht trifft und

welche die Bedeutung seiner Entdeckung vermindert: jeder Syllogismus kann zwei verschiedene Ausdrucksweisen annehmen, eine extensive und eine comprehensive; man hat zu diesem Zweck nur die Copula das eine Mal durch „ist enthalten“, das andere Mal durch „enthält“ wiederzugeben und die Reihenfolge der Prämissen umzukehren, da der terminus minor in der einen dieser Ausdrucksweisen der terminus major in der anderen ist.

So lautet der Syllogismus der Extension:

Der Mensch ist sterblich, d. h. Mensch ist enthalten in sterblich,
Peter ist ein Mensch, d. h. Peter ist enthalten in Mensch,
also: Peter ist sterblich, d. h. Peter ist enthalten in sterblich,

als Syllogismus der Comprehension so:

Peter ist ein Mensch, d. h. Peter enthält Mensch,
Der Mensch ist sterblich, d. h. Mensch enthält sterblich,
also: Peter ist sterblich, d. h. Peter enthält sterblich.

XIII. Nach diesen Unterscheidungen können wir in der Analyse des Schlussverfahrens weitergehen. Jeder Schluss ist unmittelbar oder mittelbar, unmittelbar, wenn er aus einem einzigen Urteil gewonnen ist: A ist B, also B ist A, mittelbar, wenn er aus mehreren Urteilen gewonnen ist: A ist B, B ist C, also A ist C.

Von den unmittelbaren Schlüssen sind die einen, so die Conversion, die Contraposition, die Subalternation und die Äquipollenz, zu allen Zeiten anerkannt worden, andere sind falsch aufgefasst und unzutreffender Weise unter dem Namen der disjunctiven und hypothetischen Schlüsse unter die mittelbaren eingereiht worden. Der Irrtum erklärt sich daraus, dass diese Schlussarten in drei Urteilen erscheinen:

A ist B oder nicht B,
Nun ist A B,
also ist A nicht nicht B,
Wenn A ist, ist B,

Nun ist A
Also ist B.

Sieht man aber näher zu, so sind es nur complexe Abarten des unmittelbaren Schlusses. Sie enthalten in der Tat nur zwei Begriffe, und das Urteil, welches die Rolle des Obersatzes spielt, ist nichts anderes als die allgemeine Regel des Schließens, welche bei den eigentlichen Syllogismen stillschweigend hinzugedacht wird. Müssten wir diese Regel vor jedem mittelbaren Schluss aussprechen, so würde der Syllogismus nicht drei, sondern vier Urteile enthalten, oder es würden wenigstens die beiden Prämissen zu einem complexen Urteil zusammenschmelzen.[1])

XIV. Jeder mittelbare Schluss ist also ein kategorischer und zwar entweder affirmativer oder negativer Syllogismus. Jedem Schlussverfahren geht die Frage voran: ist

---

[1]) *Logic*, Anhang IX.: „Die hypothetischen Syllogismen sind nicht mittelbare Schlussformen, sondern lediglich complexe Spielarten des unmittelbaren Schlusses durch Restriction oder Subalternation." — Dass die hypothetischen und disjunctiven Schlüsse nur unmittelbare Schlüsse sind, ist Hamiltons endgiltige Lehre, welche er jedoch nirgends regelrecht bewiesen hat und zu der er auch erst spät gelangt zu sein scheint; wenigstens ist das Bruchstück, aus welchem wir seine Argumente dafür entnommen haben, aus dem Jahre 1849. In den Vorlesungen hält er disjunctive, hypothetische und hypothetico-disjunctive (dilemmatische) Schlüsse für Syllogismen und behandelt sie nach den kategorischen Syllogismen. (Vorlesung XVIII.) In den den Vorlesungen angehängten Bruchstücken kann man dem Gange seines Denkens folgen. In einem vom November 1848 datirten Fragment unterscheidet Hamilton drei Schlussarten: 1) den commutativen (unmittelbaren), 2) den explicativen (hypothetischen), 3) den comparativen (kategorischen). Damals hielt er den hypothetischen noch für einen mittelbaren Schluss, er unterschied ihn jedoch von dem eigentlichen Syllogismus dadurch, dass das Mittlere darin ein Urteil ist. In einem anderen Bruchstück aus derselben Zeit werden die hypothetischen Schlüsse zu den unmittelbaren gerechnet, indem diese eingeteilt werden in peremtorisch unmittelbare (Subalternation, Conversion, contradictorische, conträre oder subconträre Opposition, Äquipollenz, Modalität, Contraposition, Correlation, Identität), und in alternativ unmittelbare, zu welchen letzteren die disjunctiven und hypothetischen Syllogismen der gewöhnlichen Logik gehören.

A B? Die Antwort auf diese Frage ist die Conclusion, die Prämissen sind die die letztere rechtfertigenden Gründe. Daher können, wie man sieht, die den Syllogismus bildenden Urteile auf zweierlei Weise geordnet werden. Man kann sofort auf die Frage antworten und alsdann die Gründe folgen lassen, oder man gibt zuerst diese Gründe an und darauf erst den Schlusssatz, den sie ergeben. Im ersten Falle ist der Syllogismus analytisch:

A ist C
denn A ist B
und B ist C,

im zweiten Fall ist er synthetisch:

A ist B
B ist C
also A ist C.

Bisher hat man nur den synthetischen Syllogismus beachtet, auf welchen allein alle Bezeichnungen sich beziehen. Die analytische Form ist aber nicht minder berechtigt, ja sie hat vor der andern sogar den Vorzug gröfserer Natürlichkeit. Es ist ja doch natürlicher, sofort die Antwort zu geben, anstatt den Geist in Spannung zu lassen. Aufserdem geht man bei dieser Reihenfolge von der Wirkung zur Ursache und nicht, wie im synthetischen Syllogismus, von der Ursache, den Vordersätzen, zur Wirkung, dem Schlusssatz.[1])

XV. In den bisher betrachteten Syllogismen standen die Begriffe zu einander im Verhältnis von Subject und Attribut. Dies ist jedoch nur eine zufällige Function; die Figur, für welche die Stellung des Mittelbegriffes in den Prämissen mafsgebend ist, ist keine wesentliche Form des Syllogismus, denn, auch wenn die verglichenen Termini nicht zu einander in dem Verhältnis von Subject und Attribut stehen, sondern in demselben Satze beide Subject oder Prä-

---

[1]) Vorlesung XV und XX, Anhang IX und XI.

dicat sind, bleibt es nichtsdestoweniger ein Syllogismus. Anstatt zu sagen:

A ist gleich B
B ist gleich C
also ist A gleich C

kann ich sagen (synthetisch):

A und B sind gleich
B und C sind gleich
also sind A und C gleich.

oder (analytisch):

A und C sind gleich
denn A und B sind gleich
und B und C sind gleich.

Hamilton nennt einen solchen Syllogismus einen „nicht figurirten.“ Die Grundgestalten dieser neuen Form sind die folgenden:

Alle C und einige B sind (einiges) Umkehrbare
Alle B und alle A sind (einiges) Umkehrbare
also sind alle C und einige A (einiges) Umkehrbare.

Hier stehen die verglichenen Begriffe durchweg im Subject.

(Einige) Umkehrbare sind alle C und einige B
(Einige) Umkehrbare sind alle B und alle A
also sind (einige) Umkehrbare alle C und einige A.

Hier stehen die verglichenen Begriffe durchweg im Prädicat.

Offenbar ist dies die einfachste Form des mittelbaren Schlusses. Die Unterscheidung nach Extension und Comprehension der Begriffe ist hier nutzlos, weil in jedem Urteile die verglichenen Termini beide gleichmäſsig im Subject oder im Prädicat stehen; aus demselben Grunde ist die Reihenfolge der Begriffe hier unwesentlich und darum endlich auch die Unterscheidung der Prämissen als major und minor nicht am Platze. „Diese Form“, sagt Hamilton, haben die Logiker ignorirt, obwol sie es ebenso wie irgend eine andere verdient, entwickelt zu werden. Ist sie doch der Schlüssel zu dem ganzen Geheimnis des Syllogismus.

Und merkwürdig genug: während der Canon, der seine Regel ist, und welchen man das Princip der Analogie oder der Proportion nennen kann, seit fünfhundert Jahren gemeinhin als das einzige Schlussprincip bezeichnet worden ist, ist gerade diejenige Form des Schlusses, auf welche jene Regel mit aller Strenge anwendbar ist, niemals verallgemeinert worden.“ In der Tat sagt man zur Begründung des deductiven Schliefsens: zwei Begriffe, welche mit einem dritten Begriffe zusammenstimmen oder nicht zusammenstimmen, stimmen unter einander zusammen bez. nicht zusammen. Kein Begriff, keine Unterscheidung einer Figur findet sich in diesem Princip. Es ist genau das Princip des nicht figurirten Syllogismus.[1])

XVI. Hamilton hat diese Form des Syllogismus, welche er für neu hält, nicht entwickelt, und vielleicht liefs sie sich auch nicht eben reich entwickeln, da ja in solchen Urteilen wie: Alle C und einige B sind einiges Umkehrbare, und: Einige Umkehrbare sind alle C und einige B, dasjenige, was das eine Mal als Prädicat, das andere Mal als Subject erscheint, im Grunde nur die Bezeichnung des Verhältnisses zwischen B und C ist. Seine Bemühungen gingen vor allem darauf, die Theorie derjenigen Syllogismen, in welchen die Termini zu einander im Verhältnis von Subject und Prädicat stehen, zu vereinfachen und, wie er wenigstens glaubte, zu verbessern.

Die syllogistischen Figuren sind durch die Stellung des Mittelbegriffs in den Prämissen bestimmt. Dadurch sind vier Figuren möglich. Die drei ersten sind, seit Aristoteles sie aufgestellt hat, nicht beanstandet worden. Dagegen ist die vierte, jüngere, oftmals verdächtig erschienen; jedoch hat man sie nicht definitiv beseitigt, weil man den Fehler nicht nachweisen konnte, mit welchem man sie behaftet fühlte. Die neue Analytik will die Logik von diesem „Monstrum“ befreien.

---

[1]) *Log.* Anhang XI B. Vgl. *Discussions* Anh. II.

Sehen wir uns einen Syllogismus der vierten Figur an:

P ist M
M ist S
also S ist P.

Es liegt auf der Hand, dass die Reihenfolge der Prämissen und der Conclusion nichts weniger als natürlich ist. In den Prämissen ist P der kleinste Terminus, in der Conclusion ist es der gröfste. Wenn die beiden Prämissen ausgesprochen sind, erwartet man dass P als Teil von S ausgesagt wird. Diese Erwartung wird getäuscht, bei der Conclusion ändert sich die Richtung des Schlusses plötzlich, so dass S von P ausgesagt wird. Der Grund davon ist der, dass Prämissen und Conclusion von verschiedener Quantität sind, jene von intensiver (Comprehension), diese von extensiver (Extension). Daher ist die Folgerung logisch unhaltbar, und nur durch eine nicht zum Ausdruck kommende, stillschweigend während des Schliefsens vollzogene Verwandlung der einen Quantität in die andere zu rechtfertigen. Kämen alle Schritte des Geistes, wie sie bei diesem Schlusse aufeinander folgen, zum Ausdruck, wie sie es logisch müssen, so würden wir statt eines einfachen Syllogismus mit einer einzigen, directen Conclusion ein zusammengesetztes Schlussverfahren mit zwei Conclusionen, einer directen und unmittelbaren, und einer mittelbaren und indirecten haben. Die vierte Figur ist somit eine reine logische Caprice.[1])

Es bleiben die drei ersten. Sind diese unzerlegbare Formen oder zufällige Variationen einer einzigen Grundgestalt? Die Antworten der Logiker auf diese Fragen sind unsicher und sogar contradictorisch; einerseits scheinen sie in den verschiedenen Figuren ursprüngliche und primitive Schlussformen zu erkennen, da sie den Conclusionen in einer jeden von ihnen gleiche Gültigkeit zugestehen, andererseits legen sie der ersten einen besonderen Wert bei, insofern sie

---

[1]) *Log.* Vorlesung XX.

die anderen auf sie zurückführen und ihnen dadurch nur einen abgeleiteten Wert zuzuerkennen scheinen.

Die Wahrheit ist, dass die zweite und die dritte Figur unechte und gemischte Schlüsse sind, verstümmelte Formen, in welchen nicht alle Stufen der Deduction zum Ausdruck kommen; wir gelangen zur Conclusion nur indem wir stillschweigend durch Conversion und Interpolation die Lücken ausfüllen. Sobald die wirklichen Prämissen auf diese Weise hergestellt sind, erscheint der Syllogismus in seiner echten und einfachen Gestalt, d. h. in der ersten Figur.[1]) Man nehme z. B. einen Syllogismus der zweiten Figur in Cesare:

Kein P ist M
Alle S sind M
also kein S ist P.

Kein unbedachter Mensch ist ein Philosoph
Alle Idealisten sind Philosophen
also ist kein Idealist unbedacht.

Wir erhalten durch Conversion den eigentlichen Obersatz: Kein Philosoph ist unbedacht, und durch Interpolation dieses wirklichen Obersatzes folgenden Schluss der ersten Figur in Celarent:

Kein Philosoph ist unbedacht
Alle Idealisten sind Philosophen
also ist kein Idealist unbedacht.

Oder man nehme einen Syllogismus der zweiten Figur in Camestres:

Alle P sind M
Kein S ist M
also kein S ist P.

Alle Tiere haben Empfindung
Nichts Unorganisches hat Empfindung
also ist nichts Unorganisches ein Tier.

Hier unterscheiden sich die Prämissen von denen des Syllogismus in Cesare nur durch ihre Reihenfolge; stellen wir sie um und machen wir es ebenso wie in dem ersten

---

[1]) Vorles. XXI, XXII. Vgl. Baynes S. 58 und 63.

Beispiel, so haben wir folgenden Syllogismus der ersten Figur in Celarent:

Kein Empfindung habendes Wesen ist unorganisch
Alle Tiere haben Empfindung
Also ist kein Tier unorganisch.

Ebenso ist ein Syllogismus der dritten Figur in Darapti in Wahrheit ein Syllogismus der ersten Figur in Darii:

Alle M sind P
Alle M sind S.

Der interpolirte wirkliche Untersatz:

Einige S sind M
also einige sind S sind P.

Auf diese Weise gewinnen die zweite und dritte Figur ihre Schlusssätze nicht aus ihren eigenen Prämissen, sondern aus direct aus diesen entnommenen und stillschweigend zwischen sie und die Conclusion eingeschalteten eigentlichen Prämissen.[1])

Hieraus ergeben sich einige bemerkenswerte Folgen.

In der ersten Figur, in welcher der Mittelbegriff das eine Mal Subject, das andere Mal Prädicat ist, gibt es offenbar einen terminus major und eine propositio major und in Folge dessen einen directen und unmittelbaren und einen entfernten und indirecten, durch Umkehrung des ersten entstehenden Schlusssatz.

In der zweiten und dritten Figur gibt es eigentlich keinen oberen und keinen unteren Begriff, noch auch Ober- und Untersatz, weil die beiden äufseren Begriffe beidemal Subject oder Prädicat des mittleren sind. Daher gibt es in jeder dieser Figuren zwei indifferente Schlusssätze.[2])

Aus dem Dargelegten ist ersichtlich, dass sämtliche Entwicklungen des figurirten kategorischen Syllogismus von einem einzigen Canon beherrscht werden, und dass jede Figur ihren besonderen Canon hat.

Die allgemeine Regel aller figurirten kategorischen

---

[1]) *Log.* Anhang VI.
[2]) Vorlesung XXII.

Syllogismen ist die folgende: „Das schwächste Verhältnis von Subject und Prädicat, welches zwischen einem jeden von zwei gegebenen Begriffen und einem dritten besteht, mit dem wenigstens einer von ihnen positiv verknüpft ist, besteht zwischen den beiden Begriffen selbt." In diesem Canon sind, wie leicht ersichtlich, sämtliche Regeln der alten Syllogistik zusammengefast. So ist, um nur einige zu betrachten, augenscheinlich die erste: *Terminus esto triplex, medius majorque minorque*" deutlich darin enthalten, nicht minder auch die andere: *Pejorem sequitur semper conclusio partem*," da ja das schliefsliche Verhältnis zwischen den beiden in Frage stehenden Begriffen der Qualität wie der Quantität nach das schwächste von denjenigen ist, welche in den Prämissen zwischen einem jeden der beiden äufseren Begriffe und dem mittleren bestehen. Waren beide Verhältnisse positiv, so kann die Conclusion nicht negativ sein; war eines universell, das andere particular, so muss sie particular sein. Ferner dürfen nicht beide Prämissen negativ sein, was durch die Bestimmung des Canons ausgeschlossen ist, dass wenigstens die eine der Verbindungen der beiden Begriffe mit dem Mittelbegriff positiv sein muss.[1])

Die besonderen Regeln der einzelnen Figuren sind die folgenden:

Erste Figur. — „Das schwächste Verhältnis des Bestimmenden (Prädicats) zu dem Bestimmten (Subject), welches zwischen zwei Begriffen und einem dritten besteht, mit dem wenigstens einer von ihnen positiv verknüpft ist, besteht direct zwischen den beiden Begriffen selbst, wie indirect seine Umkehrung."

Zweite Figur. — „Das schwächste Verhältnis des Bestimmten (Subjects), welches zwischen zwei Begriffen und einem dritten besteht, mit dem wenigstens einer von ihnen positiv verknüpft ist, besteht zwischen den beiden Begriffen unter einander, gleichgültig, welcher von ihnen Subject und welcher Prädicat ist."

[1]) *Log.* Anhang VII B (c). Vgl. Baynes, *An Essay*, S. 53 ff.

Dritte Figur. — „Das schwächste Verhältnis des Bestimmenden (Prädicats), welches zwischen zwei Begriffen und einem dritten besteht, mit dem wenigstens einer von ihnen positiv verknüpft ist, besteht zwischen den beiden Begriffen unter einander, gleichgültig, welcher von ihnen Subject und welcher Prädicat ist.“

XVI. Wenden wir uns von den Figuren zu den Modi, so wird das oben über die Anwendung der Lehre von der Quantificirung des Prädicats auf die Urteile Gesagte es begreiflich machen, dass die Zal der Modi in der neuen Analytik erheblich gewachsen ist. Die alte, nur das Subject quantificirende, Logik kennt 4 Figuren und 64 Modi, von welchen 19 schlussfähig sind. Die neue Analytik, welche das Prädicat ebensowol wie das Subject quantitativ bestimmt und auf diese Weise 4 Formen des negativen und 4 Formen des affirmativen Urteils unterscheidet, erkennt in 3 Figuren 108 gültige Modi an, nämlich in jeder Figur 12 affirmative und 24 negative. Hier das Verzeichnis derselben nach W. Thompson:

| Fig. 1. | | Fig. 2. | | Fig. 3. | |
|---|---|---|---|---|---|
| Affirm. | Negat. | Affirm. | Negat. | Affirm. | Negat. |
| UUU | EUE | UUU | EUE | UUU | EUE |
| | UEE | | UEE | | UEE |
| AYI | ηYω | YYI | OYω | AAI | ηAω |
| | AOω | | YOω | | Aηω |
| AAA | ηAη | YAA | OAη | AYA | ηYη |
| | Aηη | | Yηη | | AOη |
| YYY | OYO | AYY | ηYO | YAY | OAO |
| | YOO | | AOO | | YηO |
| AII | ηIω | YII | OIω | AII | ηIω |
| | Aωω | | Yωω | | Aωω |
| IYI | ωYω | IYI | ωXω | IAI | ωAω |
| | IOω | | IOω | | Iηω |

| Fig. 1. | | Fig. 2. | | Fig. 3. | |
|---|---|---|---|---|---|
| Affirm. | Negat. | Affirm. | Negat. | Affirm. | Negat. |
| UYY | EYO | UYY | EYO | UAY | EAO |
| | UOO | | UYO | | UηO |
| AUA | ηUη | YUA | OUη | AUA | ηUη |
| | AEη | | YEη | | AEη |
| UAA | EAE | UAA | EAE | UYA | EYE |
| | Uηη | | Uηη | | UOη |
| YUY | OUO | AUY | ηUO | YUY | OUO |
| | YEE | | AEE | | YEE |
| UII | EIO | UII | EIO | UII | EIO |
| | Uωω | | Uωω | | Uωω |
| IUI | ωUω | IUI | ωUω | IUI | ωUω |
| | IUη | | IEη | | IEη |

Vgl. Thompson, *On outline of the necessary Laws of Thought* S. 188.

A bezeichnet affirmativ toto partiell.
E „ negativ toto-total.
η „ negativ toto-partiell.
I „ affirmativ parti-partiell.
O „ negativ parti-total.
ω „ negativ parti-partiell.
U „ affirmativ toto-total.
Y „ affirmativ parti-total.

Thompson selbst verwirft, wie oben bemerkt, die Formen η und ω.

## Kapitel IV.

# De Morgan.

I. Lehre von den entgegengesetzten Namen. — II. Natur der Copula. — III. Theorie des Urteils. — IV. Der Syllogismus der Einzal. „Cumularische" und „exemplarische" Form des Urteils. — V. Der Syllogismus. — VI. Der numerisch bestimmte Syllogismus. — VII. Logik des Verhältnisses.

A. de Morgan,[1]) einer der geistvollsten und fruchtbarsten Mathematiker der neueren Zeit, ist in der Logik kein

[1]) August de Morgan wurde im Jahre 1806 zu Madura in der Präsidentschaft Madras geboren. Sein Vater, der Oberst John de Morgan, stand im Dienste der indischen Gesellschaft; mütterlicherseits stammte er von James Dodson ab, einem ausgezeichneten Mathematiker und Freunde de Moivre's. — Früh nach England geschickt, empfing er seinen ersten Unterricht in mehreren Privatschulen, dann in Trinity College in Cambridge. Da er sich weigerte, die theologischen Erklärungen zu unterschreiben, was damals jeder Candidat musste, konnte er den Grad eines M. of A. nicht bekommen. 1828 wurde er Professor der Mathematik an der Universität in London und bekleidete diese Stellung bis zum Jahre 1866. Als Professor der Mathematik hatte De Morgan seines Gleichen nicht. — Man verdankt ihm eine große Zal mathematischer Werke; die bedeutendsten sind: *Foundation of Algebra*, Bd. 1 und 8 der *Cambridge philosophical Transactions*, ein bedeutendes Werk, welches nach dem Urteil Rowan Hamiltons der Theorie der Quaternionen die Bahn gebrochen hat; *Essays on Probabilities*, 1838, Bd. 17 von *Lardners Cyclopädia*. — Wir geben im Folgenden das vollständige Verzeichnis seiner logi-

unmittelbarer Schüler Hamiltons. Wenn er auch wie dieser von dem Grundsatz ausgeht, dass die Logik alles explicite auszusprechen hat, was implicite in dem Gedanken enthalten ist, so gelangt er doch zu anderen Consequenzen als die neue Analytik; wenn er mit Hamilton das aristotelische System eng und unvollständig findet, so gehören doch die Veränderungen, die er damit vornimmt, und die Erweiterungen, welche er ihm gibt, ihm eigentümlich an.

Für de Morgan wie für Hamilton ist die Logik eine rein formale Wissenschaft; sie hat mit der Materie der Erkenntnis nichts zu tun, ihr Gegenstand ist das Studium der Gesetze der Denktätigkeit; der Geist an sich, die Dinge an sich sind ihr gleich fremd; sie befasst sich mit dem Geist nur in seinem Verhältnis zu den Dingen, mit den Dingen nur in ihrem Verhältnis zum Geiste.

Aus dieser Definition ergibt sich, dass die Logik dazu verurteilt ist, unvollständig zu bleiben, sobald sie unter den Denktätigkeiten, deren Gesetze sie festzustellen hat, eine Auswal trifft, diese nimmt, jene vernachlässigt: das ganze Denken gehört ihr zu, und wenn der Fall eintritt, dass die

---

schen Schriften: *First Notions of Logic*, 1839. Diese erste seiner originellen Untersuchungen vervollständigte er in einer October 1846 in den *Transactions of the Cambridge philosophical Society* (Bd. VIII No. 29) erschienenen Abhandlung, welche alsbald eine denkwürdige Polemik in Betreff der Selbständigkeit seiner Entdeckungen in der Logik zwischen ihm und Hamilton veranlasste. Hamilton hat diese Selbständigkeit schliefslich anerkannt. — 1847 erschien *Formal Logic, or the Calculus of Inference necessary and probable* in 1 Bd. — In den Jahren 1850, 1858, 1860 und 1863 veröffentlichte er vier wichtige Abhandlungen über den Syllogismus in Bd. IX und X der *C. ph. Transactions.* 1860 war aufser dem Artikel: *Logic* in der *English Cyclopaedia* der *Syllabus of a proposed system of Logic* erschienen.

Im Jahre 1866 gab er seinen Lehrstuhl auf in Folge der Weigerung des Unterrichtsrates seiner Anstalt, einen hervorragenden unitarischen Geistlichen als Professor der Logik und Psychologie zu berufen; er starb am 18. März 1871. — Vgl. über sein Leben und seine Schriften: *Monthly notices of the Royal astronomical Society*, 9. Februar 1872 Bd. XXII S. 112 einen Essay von Rangard, und den Artikel de Morgan von W. Stanley Jevons in der *Britannica Cyclopaedia.*

Sprache nur unvollständig ausdrückt, was im Geiste vorgeht, so muss die Logik weiter gehen, die Lücken der Sprache ausfüllen und den Inhalt des Denkens voll und ganz ausdrücken. Eben weil sie der Sprache sklavisch gefolgt und nur soweit wie diese gegangen sind, ohne sich zu fragen, ob ihre Grenzen auch wirklich mit denen des Denkens selbst zusammenfallen, haben die Logiker nur ein unvollständiges und zum Teil willkürliches System zu Stande gebracht, wie sogleich einleuchten muss, wenn man die ersten Elemente des Denkens, die Begriffe oder Namen ins Auge fasst, welche das Urteil und durch das Urteil den Schluss bilden.

In jeder Sprache gibt es positive und negative Namen; die einen bezeichnen das Vorhandensein, die anderen die Abwesenheit gewisser Attribute, z. B. Wirbeltiere und wirbellose Tiere. Bisweilen sind positive und negative Namen nebeneinander, parweise, vorhanden, indem der eine die Existenz, der andre die Nichtexistenz desselben Attributes oder derselben Gruppe von Attributen mitbezeichnet, wie vollkommen und unvollkommen. In der Mehrzal der Fälle jedoch hat ein positiver Name keinen entsprechenden negativen, und umgekehrt. Ein jeder Name aber ohne Unterschied teilt die Gesamtheit der wirklichen und denkbaren Dinge in zwei Gruppen: in diejenige, welche die von ihm bezeichneten Eigenschaften besitzt und in diejenige, welche sie nicht besitzt. Jeder Name hat daher zugleich einen positiven und einen negativen Sinn und kann demzufolge, in dem einen oder dem andern, auf die entgegengesetztesten Dinge angewendet werden. Das Wort Mensch z. B. gilt für Alexander und für Bucephalus, positiv von jenem, negativ von diesem; Alexander war ein Mensch, Bucephalus ein Nicht-Mensch. Mit jedem Begriff oder Namen wird also sein conträres oder contradictorisches Gegenteil mitgedacht, und die Logik muss, will sie anders ihre Aufgabe erfüllen, beide zum Ausdruck bringen. Die Begriffe sind darum parweise zu verbinden: Mensch, Nicht-Mensch; Baum, Nicht-Baum u. s. w., und jedes Par muss

die Gesamtheit der Dinge erschöpfen. Symbolisch werden die positiven Namen durch grofse Buchstaben, die negativen durch die entsprechenden kleinen bezeichnet: X, x, Y, y u. s. w.

Wenn aber tatsächlich ein jeder Name die Gesamtheit der Dinge in zwei verschiedene Gruppen teilt, so kann jede von diesen Gruppen wiederum als eine auf dieselbe Weise einteilbare Totalität aufgefasst werden. Wenn ich anstatt des ganzen Universums das Universum „Menschheit“ betrachte, so teilt es der Name „Engländer“ in zwei Gruppen: Engländer und Nicht-Engländer, und so fort bis man zu den nur ein einziges Individuum bezeichnenden Namen kommt, und auch diesen könnte man dieselbe Funktion zuschreiben, da sie das bezeichnete Individuum neben alle anderen wirklichen oder möglichen Individuen stellen. — Wir werden sogleich, bei der Erörterung der verschiedenen Arten des Urteils, die Folgen dieser Analyse der entgegengesetzten Namen kennen lernen und bemerken schon hier, dass sie dazu führt, jedweden Unterschied zwischen affirmativen und negativen Sätzen theoretisch aufzuheben. Wenn ich sage: Kein A ist B, so ist das ein blofser Zufall der Sprache; meine Sprache hat nur keinen das Gegenteil von B ausdrückenden Namen. In der Tat ist, da *b* der Name von Nicht-B ist, der Ausdruck: Kein A ist B dem anderen: jedes A ist *b* ganz gleich. Man könnte sogar behaupten, dass auch die Particularität gewisser Urteile ein solcher aus dem Mangel unserer Sprache sich ergebender Zufall ist. Wenn z. B. in einer Sprache die A keinen besonderen Namen haben, sondern nur als einige Individuen der Klasse C bezeichnet werden, so sagt man statt: die A sind B, einige C sind B.[1])

II. Die Begriffe verbinden sich zu Urteilen; ihr Bindeglied ist die Copula. Es ist von der gröfsten Wichtigkeit, die formelle Bedeutung der Copula genau zu bestimmen. — Die Copulas sind sehr zalreich und haben sehr ver-

[1]) *Formal Logic.* Kap. 2.

schiedenen Sinn; wollte man sie sämtlich analysiren, so müsste man eine Encyclopädie schreiben. Die Einheit der logischen Wissenschaft beweist jedoch, dass diese Bedeutungen sich auf gewisse Grundtypen zurückführen lassen und gemeinsame Merkmale zeigen; im anderen Falle würde es so viele Logiken geben, als es verschiedene Copulas gibt. Welches sind nun die zum Schliefsen notwendigen Bedingungen der Verbindung?

Man gebraucht das Wort „ist“ zur Verknüpfung der Namen, der Vorstellungen und der Dinge. Sage ich: der Mensch ist ein Tier, indem ich die beiden Begriffe des Urteils als Namen betrachte, so bedeutet der Satz, dass die Namen Mensch und Tier auf dieselben Individuen anwendbar sind, dass der Name Tier auf jedes Object sich muss anwenden lassen, worauf der Name Mensch angewendet wird. Wenn ich die beiden Elemente dieses Urteils nicht mehr als Namen, sondern als Vorstellungen betrachte, so bedeutet es, dass die Vorstellung Mensch alle durch die Vorstellung Tier bezeichneten Merkmale besitzt; dies ist der Gesichtspunkt der alten Logik. Wenn ich endlich dieselben Bestimmungen auf die besonderen Gegenstände beziehe, auf welche sie angewendet werden, so bezeichnet „ist“ die Identität; der Mensch ist ein Tier will sagen: jeder einzelne Mensch ist ein Tier; berührt man ihn, so berührt man ein Tier; vernichtet man ihn, so vernichtet man ein Tier. — Diese drei Bedeutungen sind keineswegs reciprok; das Identitätszeichen „ist“ z. B. lässt sich weder auf die Namen Mensch und Tier anwenden, denn als Namen sind sie nicht identisch, noch auf die Vorstellungen Mensch und Tier, denn diese Vorstellungen fallen nicht zusammen.

Trotzdem müssen diese drei Bedeutungen gewisse gemeinschaftliche Eigenschaften haben, da sonst alles Schliefsen unmöglich und der menschliche Geist auf das empirische Neben- und Nacheinander beschränkt sein würde. Nach der bisherigen Logik sind die drei Denkgesetze, das Gesetz der Identität, das Gesetz des Widerspruches und das Gesetz

des ausgeschlossenen Dritten die einzigen Grundlagen des Schlusses. Kann man aber, bei aller Anerkennung der Richtigkeit dieser Gesetze und ihrer Wirksamkeit beim Übergange von einem Urteil zum andern, mit Wahrscheinlichkeit behaupten, dass sie es sind, welche das Fortschreiten des Denkens im Schlussverfahren ermöglichen? Würden sie uns nicht, wenn sie allein vorhanden wären, bei dem ersten, dem Geiste gegenwärtigen Begriffe festhalten? folgt daraus, dass etwas es selber ist, ohne Widerspruch nicht sein Gegenteil sein kann und dass es zwischen ihm und diesem Gegenteil kein Mittleres gibt, folgt daraus, dass wir dieses Etwas von einem Anderen unterscheiden können? Und doch erfordert die Denkbewegung im Schluss eine solche Unterscheidung. Notwendig muss daher die Copula „ist", ungeachtet der Verschiedenheit ihrer Bedeutungen, in sich selbst Eigentümlichkeiten haben, ohne welche die Verbindung der Urteile zu Schlüssen unmöglich sein würde. [1])

Diese allgemeinen Eigenschaften sind die Convertibilität und die Transitivität. Nehmen wir der Deutlichkeit halber ein Urteil mit zwei singulären Begriffen: dieses A ist dieses B. Es ist ersichtlich, dass ein solches Urteil gegen die Umkehrung der Begriffe gleichgültig ist; dieses A ist dieses B und dieses B ist dieses A sind Sätze von gleicher Bedeutung und gleich wahr oder falsch. Vereinigen wir nun mit dem Satze: dieses A ist dieses B den Satz: dieses A ist dieses C, so ergibt sich aus der Vereinigung der beiden sofort ein dritter Satz: dieses B ist dieses C. Mit anderen Worten: wenn ein Ding mit einem zweiten und einem dritten in einer gegebenen Relation steht, so stehen die beiden letzteren in derselben Relation unter einander. Ohne diese beiden Eigenschaften der Copula ist der Schluss unmöglich. Nicht wenige von den gebräuchlichen Copulas sind zugleich convertibel und transitiv, so: ist identisch mit, ist gleich dem, ist der Bruder von, ist in Übereinstimmung mit u. s. w. Alle denkbaren Ver-

---

[1]) a. a. O. Kap. 3.

bindungsweisen, welche der doppelten Bedingung der Convertibilität und Transitivität entsprechen, lassen sich zu jeder Art des Schlusses verwenden.[1])

Man wird ohne Zweifel einwenden, dass es Copulas gebe, welche nicht convertibel sind — ist Vater von, ist Onkel von, ist überlegen, ist gröſser, gibt u. s. w. — und welche nichtsdestoweniger in Schlüssen von unbestreitbarer Gültigkeit verwendet werden, in Schlüssen, welche so einleuchtend sind wie der einfachste Syllogismus: A ist gröſser als B, B ist gröſser als C, also ist A gröſser als C. Man beachte jedoch, dass solche Copulas sämtlich transitiver Art sind, d. h. dass sie den Übergang von einem Begriffe zum andern zulassen, und dass auſserdem jede von ihnen eine correlative Copula hat, — ist Sohn von, ist Neffe von, ist zurückstehend hinter, ist kleiner als, empfängt von u. s. w., so dass umgekehrte Sätze wie A ist B und B ist A hier durch correlative Urteilspare ersetzt werden: A ist Vater von B, B ist Sohn von A; A ist gröſser als B, B ist kleiner als A; A gibt B, B empfängt von A u. s. w. Grammatisch sind solche Sätze verschieden, logisch aber von gleichem Wert, da die sie bildenden Begriffe gleich und durch correlative Copulas verbunden sind.

Es ergibt sich hieraus, dass in logischer Beziehung jedes Urteil auf Identität zurückgeführt werden muss. Wenn ich sage: Johann ist ein Mensch, so meine ich, dass Johann eines der Einzeldinge ist, welche Menschen genannt werden. Eine solche Auslegung scheint unmöglich, sobald das Prädicat die Bezeichnung eines abstracten Begriffes ist; jedoch ist die Unmöglichkeit nur scheinbar. Sage ich: dies Bild ist schön, so ist der Satz unvollständig, da schön nur ein Attribut, ein Hinweis auf eine von dem Geist gemachte Einteilung ist. Ein Bild, ein körperlicher Gegenstand, kann aber nur ein Gegenstand sein und kann nicht im eigentlichen Sinn einem abstracten Begriff zugehören. Seinem vollständigen Sinn nach muss daher das Prädicat

[1]) *Abhandlung No. 4.*

ein Substantivum enthalten, ein Substantivum, dessen Gesamtumfang durch das Prädicat und sein Gegenteil in zwei Hälften geteilt ist, in dem vorliegenden Fall Kunstwerk oder geistige Schöpfung oder Ding oder was es sonst für Klassen gibt, auf deren Individuen der Gegensatz schön und nicht schön angewendet werden kann. Daher befasst sich denn auch die Logik ausschliefslich mit den Namen und nicht mit den Vorstellungen oder den Dingen, welchen diese Namen zukommen. Das Urteil ist unter diesem Gesichtspunkt, den de Morgan den „onymatischen" nennt, die Behauptung oder Verneinung der Verbundenheit (Concomitanz) zweier Namen, und die Copulas sind convertirbar und transitiv.[1])

III. Welches sind nun die verschiedenen Arten des Urteils? Erinnern wir uns an das oben über die Gegensätzlichkeit der Namen Gesagte. Das Negative ist das, was übrig bleibt, wenn man von einem Ganzen den positiven Teil weggenommen hat. Wenn U das Ganze, X der positive Teil dieses Ganzen ist, so ist U–X das Negative von X. Bezeichnen wir letzteres mit $x$, so sind X und $x$ die beiden Gegensätze in einem gegebenen Ganzen; Nicht-X ist $x$ und Nicht-$x$ ist X.

Wir haben also an Stelle der beiden Begriffe X und Y die vier Begriffe X, Y, $x$, $y$. „In Folge dessen haben wir statt eines einzigen Pares X, Y, welches die vier Prädicationsformen A, E, I, O annehmen kann, vier verschiedene Pare: X, Y; X, $y$; $x$, Y; $x$ $y$. Da nun jedes von diesen in der Form A, oder E, oder I, oder O erscheinen kann, sind 16 Combinationen möglich, von denen jedoch 8, wie nähere Prüfung ergibt, die bloſse Wiederholung der 8 anderen sind. Nehmen wir, um dies nachzuweisen, zuerst A oder die allgemeine Bejahung, so werden die vier Pare sein:

1. Jedes X ist Y (die gewöhnliche Form).
2. Jedes X ist y (nicht Y).

[1]) *Syllabus 112; Form. Logic. Kap. 4; Abhandlung No. 5.*

3. Jedes x (nicht X) ist Y.
4. Jedes x (nicht X) ist y (nicht Y).

Die zweite Form: jedes X ist y (nicht Y) ist gleich der Form E in dem alten System: kein X ist Y.

Die dritte Form: jedes x (nicht X) ist Y ist gleich: kein Nicht-X ist nicht Y; nichts ist zugleich nicht X und nicht Y; jegliches ist entweder X oder Y. Kein Nicht-Geist ist nicht Materie; jegliches ist entweder Geist oder Materie. Dies ist eine neue Form. Sie bedeutet, dass jegliches in X oder in Y (oder in beiden zugleich) ist.

Die vierte Form: Jedes x (Nicht-X) ist y (Nicht-Y) — alle Nicht-Sterblichen sind Nicht-Menschen — ist gleich: Jedes Y ist X, eine Form, an welcher nichts neu ist, aufser der Umstellung der Symbole.

Nehmen wir nun die 4 Pare, welche der particularen Bejahung I entsprechen:

Einige X sind Y.
Einige X sind y.
Einige x sind Y.
Einige x sind y.

Die erste ist die gewöhnliche Form; die zweite die negativ-particulare; die dritte: einige Nicht-X sind Y kann umgewandelt werden in: einige Y sind Nicht-X; in dieser Gestalt ist sie unter die neuhinzukommenden aufgenommen. Die letzte: einige Nicht-X sind Nicht-Y, einige Dinge sind weder X noch Y, alles X Entgegengesetzte ist Y entgegengesetzt. Infanterie ist weder Artillerie noch Cavalerie: die Negation von X (Cavalerie) ist die Negation von Y (Artillerie) d. h. Infanterie.

Die Anwendung derselben Methode auf die universelle und die particulare Negation macht den Nachweis vollständig und ergibt nur die, bereits erwähnten, neuen Formen z. B. einige Y sind Nicht-X, welche wie die Form: alle Y sind X einfach der Umstellung der Buchstaben von O zu verdanken ist.

Wir haben somit aufser den alten Grundformen A, I, E, O noch vier andere Formen:

1. Jedes Y ist X.
2. Einige Y sind Nicht-X.
3. Jegliches ist entweder X oder Y.
4. Einige Dinge sind weder X noch Y [1]).

Die beiden ersten sind aber nichts anderes als die Formen A und O mit umgestellten Buchstaben, und wir bekommen schliefslich 6 Verbindungen von X und Y, 6 von x und y, 6 von X und y, und 6 von x und Y.

Diese 24 Urteilsarten lassen sich aber auf 8 unter ihnen zurückführen, wie folgendes Verzeichnis ergibt:

| | | |
|---|---|---|
| Jedes X ist Y | =Kein X ist y | =Jedes y ist x. |
| Einige X sind nicht Y | =Einige X sind y | =Einige y sind nicht x. |
| Kein X ist Y | =Jedes X ist y. | =Jedes Y ist x. |
| Einige X sind Y | =Einige X sind nicht y | =Einige Y sind nicht x. |
| Jedes x ist y | =Kein x ist Y | =Jedes Y ist X. |
| Einige x sind nicht y | =Einige x sind Y | =Einige Y sind nicht X. |
| Kein x ist y | =Jedes x ist Y | =Jedes y ist X. |
| Einige x sind y | =Einige x sind nicht Y | =Einige y sind nicht X. |

Es gibt daher 8 nicht weiter zurückführbare Urteilstypen:

1. Alle X sind Y.
2. Einige X sind nicht Y.
3. Kein X ist Y.
4. Einige X sind Y.
5. Jedes Y ist X.
6. Einige Y sind nicht X.
7. Jegliches ist entweder X oder Y.
8. Einige Dinge sind weder X noch Y. [2])

Alles das sind einfache Urteile. Greifen wir zwei beliebige heraus, so ist offenbar dreierlei möglich: entweder sie können nicht zusammenbestehen, das eine ist falsch, wenn das andere richtig ist; oder wenn das eine richtig

---

[1]) A. Bain, *Log. ded. et ind.* Buch I. Kap. 3.

[2]) *Syllab.*, 24 ff.

ist, muss es das andere auch sein; endlich das eine kann sowol mit dem anderen als auch ohne das andere bestehen.

So kann das allgemein bejahende Urteil nicht zusammenbestehen mit dem allgemein verneinenden und dem particular verneinenden; der Satz: jedes X ist Y schliefst notwendig aus: kein X ist Y und: einige X sind nicht Y. Dagegen schliefst das allgemein bejahende Urteil notwendig das particular bejahende in sich; daraus, dass jedes X Y ist, folgt mit Notwendigkeit, dass einige XY sind. Endlich das particular bejahende und das particular verneinende können zusammenbestehen und können auch nicht zusammenbestehen; die Sätze: einige X sind Y und: einige X sind nicht Y stehen zu einander im Verhältnis gleichgültigen Miteinanders (indifferenter Concomitanz).

De Morgan nennt nun complex einen jeden Satz, „welcher die Bejahung oder die Verneinung eines jeden der 8 einfachen Urteile in sich schliefst.“ Wären die 8 einfachen Urteile sämtlich concomitant, so würde es 256 mögliche Fälle des complexen Urteils geben; aber so ist es keineswegs. Nehmen wir zur Veranschaulichung des Gesagten an, dass X und Y so verbunden seien, dass keines der vier allgemeinen Urteile richtig ist: in diesem Fall sind die vier particularen richtig und wir haben ein complexes particulares Urteil. Ist dagegen eines der vier allgemeinen Urteile richtig, so sind damit fünf andere Urteile teils bestätigt teils beseitigt, und aufserdem erhalten wir zwei concomitante, contradictorische, von denen nur eines richtig ist. Es sei z. B. das allgemein bejahende Urteil: Jedes X ist Y gegeben, so sind die negativ allgemeinen und die negativ particularen als damit unvereinbar ausgeschlossen, das affirmativ particulare ist als einbegriffen in: jedes X ist Y begründet: und das indifferente concomitante Urteil ist: Jedes Y ist X. Jedes Y ist X kann also mit: Jedes X ist Y coexistiren; zusammengenommen ergeben diese beiden das complexe Urteil: Jedes X ist Y und jedes Y ist X.[1]) „Das ist aber gerade,“ sagt Bain, „Hamiltons allgemein be-

[1]) *Form. Log. Kap. 4.*

jahendes Urteil mit einem der Quantität nach allgemeinen Prädicat: Alle X sind alle Y. De Morgan zufolge darf daher diese Form nicht zu den einfachen und fundamentalen Urteilen gerechnet werden, sie ist vielmehr complex oder zusammengesetzt und auf dem angegebenen Wege aus den einfachen Formen ableitbar. Zum Beweise dieser Lehre beruft er sich darauf, dass das in Rede stehende Urteil keine einfache Negation zulässt. Sowol: einige X sind nicht Y, als: einige Y sind nicht X steht ihm als Widerspruch gegenüber, d. h. der disjunctive Ausdruck entweder einige X sind nicht Y oder einige Y sind nicht X, und es ist nicht erforderlich zu bestimmen, welches von diesen beiden Urteilen geltend gemacht werden muss, so dass der Widerspruch zweifelhaft und unbestimmt ist."

De Morgan legt in seiner formalen Logik einen grofsen Wert auf die complexen Urteile, und bemerkt nicht ohne Grund, dass die gewöhnlichen Urteile in der Regel complex sind, indem nur eines der sie bildenden einfachen ausgedrückt, das andere aber stillschweigend hinzugedacht wird.

IV. Wir haben gesehen, dass unter dem Gesichtspunkt, den de Morgan den onymatischen nennt, das Urteil nichts anderes ist, als die Verbindung zweier Namen als Bezeichnungen desselben Gegenstandes. Die onymatischen Beziehungen zwischen zwei gegebenen Namen und ihren Gegenteilen sind die folgenden:

X und Y haben eine gemeinsame Anwendung,
X und Y haben keine gemeinsame Anwendung,
X und y haben eine gemeinsame Anwendung,
X und y haben keine gemeinsame Anwendung,
x und y haben eine gemeinsame Anwendung,
x und y haben keine gemeinsame Anwendung,
x und Y haben eine gemeinsame Anwendung,
x und Y haben keine gemeinsame Anwendung,

Das onymatische Urteil hat, wie sich hieraus ergibt, an sich keine Quantität; es genügt, dass es auf einen

einzigen Gegenstand geht. Der onymatische Syllogismus muss demgemäſs folgendermaſsen formulirt werden:

A und B haben eine gemeinsame Anwendung,
B nud C haben eine gemeinsame Anwendung,
also: A und C haben eine gemeinsame Anwendung
und zwar so vermöge des transitiven Charakters der Copula in onymatischen Urteilen:

Anders ausgedrückt:

Dieses A ist B.
Dieses B ist C.
also: Dieses A ist C.

Das nennt de Morgan den Syllogismus der Einzal.

In der Regel jedoch bezieht sich das Urteil auf eine Vielheit gleichbenannter Dinge und hat alsdann eine durch die Worte „alle" (ganz) und „einige" bezeichnete Quantität. Welches ist der genaue Sinn dieser Worte?

Die neueren Logiker gebrauchen sie so, als bezeichneten sie geometrische Gröſsen und nicht numerische Quantitäten; sie sprechen von dem ganzen Umfange und einem Teil des Umfanges einer gegebenen Gattung, indem sie letztere als ein in Teile oder Arten teilbares Ganze auffassen. Dadurch wird ihre Ausdrucksweise undeutlich. Handelt es sich z. B. um „weiſse Quadrate," so kann: das allgemeine und das besondere Urteil bei ihnen ebensowol bedeuten: „das ganze Quadrat ist weiſs" und „irgend ein Teil des Quadrates ist weiſs" als auch: „alle Quadrate sind weiſs" u. s. w. In Wahrheit beziehen sich die allgemeine und die particulare Quantität auf die Zal der in der Aussage enthaltenen Fälle. Sage ich: alle A sind B, so meine ich, dass das erste A ein B ist, das zweite A ebenfalls, das dritte desgleichen. Sage ich: kein A ist B, so meine ich, dass weder das erste, noch das zweite, noch das dritte A ein B ist. Ebenso wenn ich sage: einige A sind B, so meine ich, dass wenigstens ein A ein B ist; und sage ich: einige A sind nicht B, so meine ich, dass wenigstens ein A nicht B ist. In quantitativer Beziehung hat das Urteil daher einen rein numerischen Sinn.

Daraus folgt, dass die universellen und particularen Urteile eine Summe von Urteilen der Einzal sind. Die „cumularische“ Form des Urteils ist daher nicht ursprünglich und einfach, die „exemplarische“ Form geht ihr voran und ist in ihr enthalten.

De Morgan nennt „exemplarisch“ jedes Urteil, welches sich auf einen einzigen Fall bezieht und demgemäſs die Prämissen eines Syllogismus der Einzal werden kann, wie: dieses X ist ein Y, dieses X ist nicht irgend welches Y. Es bezieht sich auf ein Exemplar, daher sein Name. Es kann aber auch auf eine unbegränzte oder begränzte Zal von Exemplaren gehen, wie: jedes X ist jedes Y, manches X ist manches Y. In diesen Fällen tritt an die Stelle der Quantität der Logiker eine Auswal, im ersten Fall eine unbegränzte: welches X oder Y man auch betrachte, dieses X ist dieses Y; im zweiten Fall eine unbestimmt limitirte: unter allen Fällen von X und Y ist wenigstens einer, in welchem X und Y keine gemeinsame Anwendung haben.[1])

Sieht man es so an, so würden die Formen des Urteils in folgender Weise zu modificiren sein:

1. Ein beliebiges X ist ein beliebiges Y,
2. Manches X ist nicht manches Y,
3. Ein beliebiges X ist manches Y.
4. Manches X ist nicht ein beliebiges Y,
5. Manches X ist irgend welches Y,
6. Ein beliebiges X ist nicht manches Y.
7. Ein beliebiges X ist nicht ein beliebiges Y,
8. Manches X ist manches Y.

Diese Liste der exemplarischen Urteilsformen ist es, welche Hamilton für eine totgeborene Ungeheuerlichkeit erklärte. De Morgan hat sich dagegen bemüht zu zeigen, dass diese angebliche Ungeheuerlichkeit die Ausführung der echt aristotelischen Gedanken sei. Es ist, sagt er, eine Tatsachen-Frage. Bedienten sich die Alten des Singularis oder des Pluralis? Sagten sie: jeder, irgend welcher, man-

---

[1]) *Syllab.* 54, 74.

cher, oder nicht? Wenn im Griechischen πᾶς die beiden Bedeutungen: ὅλος und ἕκαστος hat, so ist unbestreitbar, dass es in der Logik ἕκαστος bedeutet, wie denn auch Aristoteles in der ersten Analytik alle seine Quantitätsbezeichnungen im Singular gebraucht; z. B. definirt er das Allgemeine als das was jedem oder nicht irgend einem zukommt, τὸ παντὶ ἢ μηδενί und das Particulare als das was irgend einem oder nicht jedem τὸ τινὶ ἢ μὴ παντί zukommt.

Übrigens ist die exemplarische Form in der Geometrie längst üblich. Alle Sätze des Euclid beziehen sich auf einen einzigen Fall, und wenn der Beweis demonstrative Kraft hat, so erklärt sich das daraus, dass bei dem exemplarischen Denken nichts uns hindert, für irgend eines „jedes beliebige" zu setzen.

V. Kommen wir nun zu den verschiedenen Typen des Syllogismus. Man kann sie in „exemplarischer" und in „cumularischer" Form ausdrücken, im Singularis und im Pluralis. Der ursprüngliche Typus ist jedoch der „Syllogismus der Einheit:"

Dieses X ist dieses Y
Dieses Y ist dieses Z
also ist dieses X dieses Z,

oder

Dieses X ist dieses Y
Dieses Z ist dieses Y
also ist dieses X dieses Z.

Denn da die Copula in den onymatischen Urteilen convertirbar ist, findet ein Unterschied der Figuren nicht statt.

Sämtliche Syllogismen lassen sich aus folgenden Combinationen ableiten:

1) Alle X sind Y, alle Y sind Z, also alle X sind Z. — Hier wird der Syllogismus der Einheit: dieses X ist Y, dies selbe Y ist Z so oft wiederholt, (cumularische Form) als es X in der betrachteten Gesamtheit gibt.

2) Einige X sind Y, alle Y sind Z, also einige X sind

Fälle, in denen aus gemeinhin als particular angesehenen Vordersätzen ein richtiger Schluss gezogen werden kann, strengen Regeln unterworfen. Seine Theorie von dem numerisch bestimmten Urteil hat ihn darauf geführt. Alle X sind Y bedeutet, wie wir sahen, dass jedes beliebige X jedes beliebige Y ist; einige X sind Y, dass wenigstens ein X ein Y ist. Die Auswal der Fälle ist das erste Mal unbegrenzt, das zweite Mal unbestimmt begrenzt. Setzt man nun aber statt einige eine bestimmte Zal, z. B. 40 oder 50, so erhält man ein Urteil, welches die alten Logiker zu den particularen gerechnet haben würden, weil es nicht alle möglichen Fälle des Subjectes umfasst, das man aber doch davon zu unterscheiden hat, eben weil die Quantität desselben numerisch bestimmt ist. Aus Urteilen dieser Art lassen sich Schlüsse gewinnen, welche zu keiner der bisher aufgestellten Arten des Syllogismus gehören: es sind die numerisch bestimmten Syllogismen.

Wenn wir z. B. die beiden Prämissen haben: die Mehrzal der X sind Y; die Mehrzal der X sind Z, so können wir mit Sicherheit daraus schliefsen, dass einige Y Z sind, da ja die beiderseitigen gröfseren Hälften der Klasse X notwendig aus denselben Einzelnen bestehen müssen. Kennt man genau das Verhältnis der „Mehrzal" einer jeden Prämisse zur ganzen Klasse X, so lässt sich der Schluss mit mathematischer Strenge bestimmen. Wenn von 100 X 60 Y und 70 Z sind, so müssen wenigstens 30 zugleich Y und Z sein.[1])

De Morgan fasst seine Theorie des numerisch bestimmten Syllogismus folgendermafsen in seinem Syllabus zusammen:

Es sei $u$ die Gesamtzal der in Betracht kommenden Einzelnen, $x_1$ $y_1$ $z_1$ die resp. Zalen der X, Y, Z; $u$-$x_1$ $u$-$y_1$ $u$-$z_1$ sind alsdann die Zalen der $x$, der $y$ und der $z$ d. h. der nicht-X, der nicht-Y und der nicht-Z. Wenn ferner $m$XY bedeutet, dass $m$X (oder mehr) Y sind, so wird $m$X$y$

---

[1]) *Form. Log.* Kap. 8.

Z. — Hier wird der Syllogismus der Einheit so oft wiederholt als es X in der ersten Prämisse gibt.

3) Einige X sind alle Y, einige Y sind Z, also einige X sind Z. — Formell ist dies der vorangehende Fall, bis auf die Umstellung.

4) Einige X sind alle Y, alle Y sind Z, also einige X sind Z, nämlich so viel als es Y in der betrachteten Gesamtheit gibt.

Dies sind die vier möglichen Pare affirmativer Prämissen, wenn man von jeder Bestimmung der entgegengesetzten Begriffe absieht. Da aber alle Negationen auf Affirmationen des Entgegengesetzten zurückgeführt werden können, so muss die Anwendung der aufgezälten vier Fälle alle möglichen Formen gültiger Syllogismen ergeben.

Wenden wir die Form 1 auf die acht Varietäten X Y Z, *x* Y Z, *x y* Z, *x y z*, *x* Y *z*, X Y *z*, X *y z*, X *y* Z an, so erhalten wir 8 Formen universeller Syllogismen d. h. solcher mit allgemeinen Prämissen und allgemeinem Schlusssatz.

Wenden wir auf dieselben 8 Varietäten die Form 2 an, so erhalten wir 8 Syllogismen mit particularer erster Prämisse (minor) und particularem Schlusssatz.

Die Anwendung der Form 3 ergibt 8 Syllogismen mit particularer zweiter Prämisse (major) und partikularem Schlusssatz.

Endlich Form 4 ergibt 8 Syllogismen mit allgemeinen Prämissen und particularem Schlusssatz — im ganzen 32 schlusskräftige syllogistische Combinationen.

Das Kriterium der Gültigkeit des Schlusses ist hiernach dieses: ein Schluss tritt ein 1) sobald beide Prämissen allgemein sind, 2) sobald bei der Particularität einer Prämisse der Mittelbegriff in beiden Prämissen verschiedene Quantität hat.

VI. De Morgan hielt somit fest an der alten Regel: *nil sequitur geminis e particularibus unquam.* Er hat jedoch, und dies ist einer seiner eigentümlichsten Versuche, die

bedeuten, dass $m$X (oder mehr) y oder nicht-Y sind, und $m$YX und $my$X sind analog zu interpretiren wie $m$XY und $m$Y$y$. — Gewisse Urteile sind nun kraft der Zusammensetzung der betrachteten Gesamtheit notwendig richtig. In einer Gesamtheit z. B. von 100 Fällen, unter denen 70 X und 50 Y sind, ist das Urteil notwendig: 20 X sind Y. — Setzen wir nun jede negative Quantität = 0; (6—10) XY wird alsdann bedeuten, dass kein X (oder mehr) Y ist. Die Quantificirung des Prädicates ist unnötig, denn der Satz: $m$X befinden sich unter $n$Y bedeutet dasselbe wie $m$X befinden sich unter den Y, oder $m$XY. Der Satz: keines von $m$X befindet sich unter einer Anzal von $n$Y, ist nichtig, wenn nicht $m+n$ größer ist als $x_1$ und $y_1$, in welchem Fall er völlig gleich ist $(m+n-y_1)$ X$y$ und ebenso $(m+n-x_1)$ Y$x$.

In $m$XY ist der nichtige Teil, wenn er vorkommt, $(x_1+y_1-u)$ XY, der richtige ist $(m+u-x_1-y_1)$ $xy$. Für jeden Fall des letzteren Ausdrucks muss es ein x geben, welches y ist.

Die folgenden Sätze sind parweise identisch:

$$\text{mXY} = (\text{m} + \text{u} - \text{x}_1 - \text{y}_1)\ \text{xy}$$
$$\text{mXy} = (\text{m} + \text{y}_1 - \text{x}_1)\ \text{xY},$$
$$\text{mxY} = (\text{m} + \text{x}_1 - \text{y}_1)\ \text{Xy}$$
$$\text{mxy} = (\text{m} + \text{x}_1 + \text{y}_1 - \text{u})\ \text{XY}$$

Aus mXY und nYZ folgt $(\text{m} + \text{n} - \text{y}_1)$ XZ oder sein Äquivalent $(\text{m} + \text{n} + \text{u} - \text{x}_1 - \text{y}_1 - \text{z}_1)$ xz. Die folgenden vier Formen umfassen sämtliche Fälle der Syllogismen dieser Art:

1. mXY
   nYZ
   $(\text{m} + \text{n} - \text{y}_1)$ XZ.
2. mXy
   nYZ
   $(\text{m} + \text{n} - \text{x}_1)$ xZ.
3. mXY
   nyZ
   $(\text{m} + \text{n} - \text{z}_1)$ Xz.

4. mXy
nyZ
$(m + n + y - x_1 - z_1)$ xz.

Wird das eine oder das andere Glied des Schlusses in sein Gegenteil verwandelt, so finden die entsprechenden Veränderungen in den Formen der Folgerung statt. So müssen wir, um die Folgerung aus myx und nyz zu finden, in der vierten Form x schreiben anstatt X, z anstatt Z, X anstatt x, Z anstatt z, $u - x_1$ an Stelle von $x_1$ und $u - z_1$ an Stelle von $z_1$.[1])

In dem gewöhnlichen Denken kommen allerdings Syllogismen mit numerisch bestimmter Quantität selten vor.

Häufig aber ist die Zal der Fälle des einen Gliedes der Gesamtzal der Fälle des andern gleich. Z. B.: auf jedes Z kommt ein X, welches Y ist; einige Z sind nicht Y. Hier haben wir $z_1$XY und nZy. Daher $(z_1 + n - z_1)$ Xz und $(z + n - x)$ xZ. „Auf jeden Menschen im Hause kommt ein Individuum, welches alt ist; einige Menschen sind nicht alt, woraus folgt, dass einige Individuen im Hause nicht alt sind.“ De Morgan nennt das einen Syllogismus mit transponiter Quantität.[2])

In der gewöhnlichen Sprache gibt nur ein Ausdruck zu Syllogismen der erörterten Art Veranlassung, der Ausdruck: die Mehrzal:

Die Mehrzal der Y sind X,
Die Mehrzal der Y sind Z,
also: Einige X sind Z. —
Die Mehrzal der Y sind X,
Die Mehrzal der Y sind nicht Z,
also: Einige X sind nicht Z. —
Die Mehrzal der Y sind nicht X,
Die Mehrzal der Y sind nicht Z,
also: Einige Dinge sind weder X noch Z.

---

[1]) *Syllab.* 74 bis 80.
[2]) Vgl. Anhang zu *Abhandlung. IV.*

Diese fragmentarische Skizze würde allzu unvollständig sein, wenn wir es unterliefsen die umfassenderen Gesichtspunkte kurz anzudeuten, zu welchen de Morgan durch seine letzten Untersuchungen geführt worden ist. — Wir sahen, dass nicht alle Copulas gleiche Bedeutung und gleiche Eigenschaften haben. „Ist" als Zeichen der Identität ist nicht identisch =, dem Zeichen der Gleichheit; trotzdem sind beide convertible und transitive Copulas. „Ist gröfser als," „ist Ursache von" bedeuten weder Identität noch Gleichheit und sind aufserdem zwar transitiv, jedoch nicht convertibel; jeder von beiden Ausdrücken hat eine correlate Copula: „ist kleiner als," „ist Wirkung von." Darum haben die Logiker, um ihrer Wissenschaft eine künstliche Einheit zu geben und alle Verhältnisse auf diejenigen zurückzuführen, welche durch „ist", bejaht, durch „ist nicht" verneint werden können, gewaltsam das Verhältnis ins Prädicat hineingezogen. Sie sagen z. B. dass in dem Urteil: A ist gröfser als B, „gröfser als B" das Prädicat ist, und dass die Copula „ist" Identität dieses Prädicates mit dem Subject bedeutet. Das ist aber nur eine Ausflucht, durch welche sie das Unvollständige und Irrige ihrer Auffassung bemänteln wollen. Tatsächlich haben sie das Studium des Verhältnisses im allgemeinen von ihrer Wissenschaft ausgeschlossen, und doch: wenn die Logik wirklich ist, wofür sie sie erklären, die reine formale Wissenschaft von den Gesetzen des Denkens, muss da nicht alles Materielle, alles Inhaltliche aus den verschiedenen Relationen des Denkens und der Sprache entfernt und nur die allgemeine Form derselben festgehalten werden? Allgemein gibt man zu, dass „A ist B, B ist C, also A ist C" der Ausdruck rein formaler Verhältnisse ist, aber man bestreitet es von den Verhältnissen „A $=$B, B$=$C, also A$=$C." Die Wahrheit ist, dass in der Sprache die Copula immer materialisirt ist, ob sie nun Identität oder Ursache bedeute; das einzige rein formale Verhältnis ist „Verhältnis im allgemeinen", noch abgesehen von allen Besonderheiten, die es annehmen kann. Es ist daher eine allgemeine Logik des Verhältnisses erforderlich,

von welcher die Logik der Identität, die Logik der Gleichheit, d. h. diejenigen Schlüsse, in denen die Copula Identität oder Gleichheit bedeutet, besondere Fälle sein würden. Unter diesem Gesichtspunkt würde der Syllogismus nur ein Fall der Verhältnisverbindung sein. Eine solche Auffassung muss notwendig gegen die Vorurteile und Gewohnheiten der professionellen Logiker empfindlich verstoſsen; aber was würde man zu einem Mathematiker sagen, welcher darum, weil die Arithmetik sich mit Zalen befasse, sie für alle Ewigkeit auf die Numeration beschränken und die abstracten Resultate, welche zum Differentialcalcül führen, für null und nichtig erklären wollte?

Es seien X und Y zwei einzelne Begriffe, L das Verhältnis, welches zwischen ihnen bestehen kann oder nicht bestehen kann. X..LY bedeute die Bejahung, X.LY die Verneinung dieses Verhältnisses. X..LY wird dann also bedeuten, dass X ein Object ist, welches mit Y in dem Verhältnis L steht, d. h. dass X eines der L von Y ist; X.LY bedeutet, dass X ein Object ist, welches mit Y nicht in dem Verhältnis L steht, d. h. dass X nicht eines von den L von Y ist. Das Prädicat kann, was wol zu beachten ist, selber das Subject eines Verhältnisses sein, sodass dann innerhalb des Urteils selber eine Verhältnisverbindung stattfindet. Es sei z. B. X..L (MY). Dies bedeutet: X ist eines der L eines der M von Y; wir können also X denken als „ein L von M“ von Y, ein Urteil, dessen Ausdruck ist X..(LM) Y oder einfacher: X.. LMY.

Jedes Verhältnis L hat ein umgekehrtes $L^{-1}$, und dieses wird wie gewöhnlich definirt; wenn X.. LY, so Y..$L^{-1}$ X, d. h. wenn X eines der L von Y ist, so ist Y eines der $L^{-1}$ von X, — Ebenso hat jedes Verhältnis ein ihm entgegengesetztes. Wenn X nicht irgend ein L von Y ist, so steht X in irgend einem Nicht-L Verhältnis zu Y. Das Zeichen für das conträre Verhältnis ist l. So ergibt X. LY : X..lY: umgekehrt ergibt X.. lY : X. LY. Conträre Verhältnisse können verbunden werden, obgleich conträre Begriffe es nicht können; Xx ist unmöglich, aber LlX, d. h.

das L eines Nicht-L von X ist denkbar. So kann ein Mensch der Anhänger eines Nicht-Anhängers von X sein.

Dies reicht hin zum Beweise, dass der Syllogismus eine Verbindung von Verhältnissen ist. Betrachten wir die einfachsten Fälle d. h. diejenigen, welche kein convertirtes Verhältnis enthalten.

X steht in dem Verhältnis L zu Y
Y steht in dem Verhältnis M zu Z
also steht X in dem verbundenen Verhältnis LM zu Z.

Symbolisch:

X..LY
Y..MZ
also X..LMZ. —

X steht nicht in dem Verhältnis L zu Y
Y steht in dem Verhältnis M zu Z
also steht X in dem verbundenen Verhältnis Nicht-LM zu Z.

Symbolisch:

X.LY
Y..MZ
also X..lMZ. —

X steht in dem Verhältnis L zu Y
Y steht nicht in dem Verhältnis M zu Z
also steht X in dem verbundenen Verhältnis L Nicht-M zu Z.

Symbolisch;

X..LY
Y.MZ
also X..LmZ. —

X steht nicht in dem Verhältnis L zu Z
Y steht nicht in dem Verhältnis M zu Z
also steht X in dem verbundenen Verhältnis Nicht-L Nicht-M zu Z.

Symbolisch:

X.LY
Y.MZ
also X..lmZ. —

In diesen Syllogismen mit zusammengesetzten Verhältnissen erscheinen die Figuren, welche in dem cnymatischen

Syllogismus unbegründet waren, wieder und werden wieder wichtig; nur werden sie nicht durch die Stelle des. Mittelbegriffs bestimmt. Ob man sagt X.. LY oder LY.. X, die Figur ist dieselbe, sie kann nur durch die Conversion des Verhältnisses verändert werden. — Die erste Figur ist die des „directen Überganges:“ X steht im Verhältnis zu Z vermöge der Verhältnisse von X zu Y und von Y zu Z. — Die vierte Figur ist die des „umgekehrten Überganges:“ X steht im Verhältnis zu Z vermöge der Verhältnisse von Z zu Y und von Y zu X. — Die zweite ist die „der Beziehung auf den Mittelbegriff:“ X steht im Verhältnis zu Z vermöge der Verhältnisse von X und Z zu Y. — Die dritte ist die „der Beziehung des Mittelbegriffs:“ Y steht im Verhältnis zu Z vermöge der Verhältnisse von Y zu X und Z.[1])

Man ersieht aus dieser raschen Darlegung, dass eine allgemeine Charakteristik der Logik de Morgans ihre Schwierigkeiten hat. Im einzelnen ist sie voll von oft scharfen, immer sinnreichen Gedanken; was aber würde die Grundauffassung sein, welche diese zusammenhält und ihre Seele ist? Nicht ohne Grund sagte de Morgan, dass Logiker und Mathematiker sich mit Unrecht gegenseitig ignoriren; es war unzweifelhaft seine Absicht, die Grundlagen der Logik wie die der Mathematik zu gleicher Zeit durch genaue Bestimmung der Analogien der qualitativen und der quantitativen Schlüsse zu verbreitern. Jedoch hinterlässt sein System bei der bunten Fülle seiner hier nicht wiederholten Bezeichnungen, bei seiner Überladenheit mit wörtlichen Unterscheidungen, mit seinen endlosen Einteilungen und Untereinteilungen nicht den Eindruck der Einheit und Einfachheit, welcher das Merkmal abschliefsender Leistungen ist.

---

[1]) *Abhandlung* No. IV.

## Kapitel V.

# Boole.

I. Allgemeine Grundsätze. — II. Von den logischen Symbolen und ihren Gesetzen. — III. Vergleichung der logischen mit der mathematischen Algebra. — IV. Entwickelung der Functionen. — V. Allgemeine Interpretation der logischen Gleichungen. — VI. Von der Eliminirung. — VII. Zurückführung eines Systems von Urteilen auf eine Gleichung. — VIII. Von den secundären Urteilen; Princip ihres symbolischen Ausdrucks.

I. Die Arbeiten Booles[1]) über die formale Logik haben nicht in demselben Grade wie die Hamiltons und seiner unmittelbaren Schüler Aufsehen gemacht, auch in England nicht. Und doch wird, wenn die von den englischen Logikern des neunzehnten Jahrhunderts angestrebte Reform gelingt, die Neubegründung der Wissenschaft keinem andern als Boole zu verdanken sein. Seine Vorgänger, besonders Hamilton, haben die Mängel aller Vorläufer: Unsicherheit hinsichtlich des Zieles, tastende Unbestimmtheit in Erfindung

[1]) Boole (Georg), einer der originellsten englischen Mathematiker und Logiker, ist geboren in Lincoln am 2. November 1815 und gestorben am 4. December 1864. Sein ganzes Leben war dem mathemathischen Unterricht gewidmet. Seine Schriften sind: *The mathematical analysis of Logic, being an essay towards a calculus of deductive reasoning*, Cambridge 1847, und *An investigation of the Laws of Thougt on which are founded the mathematical theories of Logic and Probabilities*, London 1854.

und Wal der Mittel. Sie haben denn auch nur eine Reihe fragmentarischer, mehrfach wieder von vorn angefangener, oft schlecht verbundener, zuweilen geradezu zusammenhangsloser Skizzen geliefert. Bei Boole hingegen keinerlei Ungewissheit über das zu erreichende Ziel, keinerlei Unentschlossenheit hinsichtlich des dazu führenden Weges; sein Werk ist ein umfassendes System aus einem Stück, von vollkommener organischer Einheit.

Es ist wichtig, das Wesen dieses Systems genau zu bezeichnen. Es ist eine *mathematische Analysis der formalen Logik*, ein *Calcül des deductiven Schlussverfahrens.* Wie ist diese kurze Erklärung zu verstehen?

Gewöhnlich leitet man Booles Theorien ganz unmittelbar aus denen Hamiltons her. Die Lehre von der Quantificirung des Prädicates, das Princip der „neuen Analytik" Hamiltons scheint ja in der Tat jeden formalen Unterschied des syllogistischen und des mathematischen Schliefsens aufzuheben und so zur Begründung einer algebraischen Logik zu führen. Vor Hamilton hatten die Logiker die Begriffe der Qualität und die Begriffe der Quantität streng auseinandergehalten; jene bestehen aus heterogenen, in einander eingeschlossenen und gleichsam eingeschachtelten Elementen, diese sind aus homogenen, mit einander verbundenen und neben einander gestellten Teilen zusammengesetzt; demgemäfs entstehen in dem einen Fall, wenn sich Qualitätsbegriff mit Qualitätsbegriff verbindet, Urteile, mittels der Copula „ist" verknüpfte Termini, in dem anderen, wenn sich Quantitätsbegriff mit Quantitätsbegriff verbindet, Gleichungen, mittels der Copula „gleich" verknüpfte gleiche oder gleichwertige Termini; die Verkettung der Urteile ergibt Syllogismen und Reihen von Syllogismen, die der Gleichungen mathematische Rechnungen. Die ursprüngliche Verschiedenheit der Qualitäts- und der Quantitätsbegriffe erhält sich daher in allen Combinationen der einen wie der anderen. Ist hingegen, wie Hamilton will, jedes Urteil im Grunde eine Gleichung von Subject und Prädicat, so kann in formaler Beziehung zwischen einem durch Ein- und

Ausschliefsung der Begriffe in successiven Urteilen und einem durch Substitution gleicher oder gleichwertiger Glieder in verschiedenen Gleichungen vorschreitenden Schlussverfahren nicht mehr unterschieden werden; der eigentliche und echte Typus alles deductiven Folgerns ist in diesem Fall die mathematische Rechnung, und die Logik ein besonderer Zweig der Algebra.

Ist dies nun der Gesichtspunkt der algebraischen Logik Booles? Man würde seine Leistung beträchtlich unterschätzen, wollte man es glauben. Eine auf den soeben skizzirten Principien aufgebaute mathematische Logik würde im Grunde nichts weiter als eine symbolische Darstellung der alten Logik sein. Von dieser letzteren wäre alles beibehalten, Grundsätze, Methoden und Hauptformen; hinzukämen nur einige aus der Anwendung der Quantificirung des Prädicates auf die Urteile hervorgehende neue Formen. Es wäre noch immer, wenn auch in mathematischer Einkleidung, die alte Analytik. Das Gebiet der formalen Logik würde nicht erweitert, Kraft und Tragweite ihrer Methoden nicht erhöht sein; nur etwa in der Vereinfachung ihrer Sätze und der Abkürzung ihrer Behandlung würde ein Gewinn liegen.

Boole aber hat gerade das Gebiet der deductiven Logik erweitern und ihre Tragweite erhöhen wollen. In der alten Analytik ist ein jeder Schluss entweder aus einem einzigen Urteil gezogen (unmittelbarer Schluss), oder aus zwei Urteilen (mittelbarer Schluss, Syllogismus). Hierbei bleibt das deductive Verfahren stehen. Es wird nicht gefragt, welches alle logisch möglichen Verhältnisse zwischen allen Begriffen eines gegebenen Urteils sind, so zalreich letztere auch sein mögen, es wird ferner nicht gefragt, welche Schlusssätze sich aus einem System von mehr als zwei Prämissen ergeben würden. So ist ja der Sorites, zu welchem wenigstens drei Prämissen erforderlich sind, eine Kette von Syllogismen, in der der Schlusssatz der ersten Folgerung zum major der zweiten wird und so fort bis zur Endconclusion.

Worin besteht nun die deductive Operation? In der

Eliminirung eines Mittelbegriffs in einem System von drei Begriffen. Von seinem mathematischen Instinct geleitet, verallgemeinert Boole das Problem und stellt es folgendermaſsen: Wenn ein Ganzes von beliebig vielen Begriffen gegeben ist, sollen beliebig viel Mittelbegriffe eliminirt und sämtliche in den Prämissen enthaltene Verhältnisse zwischen den Elementen, welche man beizubehalten wünscht, bestimmt werden. Oder anders ausgedrückt: Wenn gewisse logische Bedingungen gegeben sind, soll eine beliebige Klasse von Objecten unter diesen Bedingungen dargestellt werden.

Das ist die eigentümliche Auffassung, die neue Idee, die, wenn sie richtig ist, das Aussehen der Logik verändern muss. Man sieht in der Tat leicht ein, dass, wenn das in allgemeiner Fassung so hingestellte Problem lösbar ist, der alte Syllogismus nebst Zubehör, welcher bisher die ganze Logik ausgemacht hat, schlieſslich nur ein besonderer Fall ist, ebenso wie in der Algebra die Eliminirung eines Quantitätssymbols in zwei gegebenen Gleichungen nur ein besonderer Fall der allgemeinen Theorie der Elimination ist. Man hat neuerdings Booles Leistung in der Logik mit der des Descartes in der Geometrie verglichen, und wie wir weiterhin sehen werden, fehlt es dieser Vergleichung nicht an Genauigkeit; wenn er aber dazu geführt wurde, die Algebra auf die Logik anzuwenden, wie sie Descartes auf die Geometrie angewendet hatte, so hat er das Problem des deductiven Schlieſsens vermöge einer Gesamtanschauung verallgemeinernd umgestaltet, vergleichbar der des Mathematikers, der zuerst den Gedanken einer allgemeinen Theorie der Auflösung von Gleichungen gehabt hat.

Es ist leicht ersichtlich, dass es töricht sein würde, zum Behuf der Lösung des allgemeinen Problems der Logik, wie Boole es gefasst hat, irgend welche Hülfe von der peripatetischen Analytik zu erwarten; diese bleibt in ihren engen Rahmen eingeschlossen. Ebensowenig kann man alle einzelnen Fälle, die das Problem enthält, in concreten Beispielen darstellen. Man muss daher, um es zu lösen, ein

dem mathematischen analoges Verfahren anwenden und aus der allgemeinen Logik einen Calcül machen.

Ehe wir weiter gehen, bedarf dieser Gedanke einer Erläuterung. Die Logik mittels des Calcüls behandeln bedeutet nicht, wie man glauben könnte, die Methoden der Algebra ohne weiteres auf die Syllogistik anwenden und so die Logik abhängig machen von der Mathematik. Wenn man unter Mathematik, der verbreitetsten Ansicht entsprechend, die Wissenschaft der Quantitäten und der Gröfsen versteht, so ist unbestreitbar, dass die Qualitätsbegriffe auch bei algebraischer Behandlung ihre Eigenart bewahren müssen und sich nicht in Quantitätsbegriffe verwandeln können. Wenn aber die in der Algebra angewendeten Zeichen und Symbole Zeichen und Symbole quantitativer Begriffe und Verhältnisse sind, ist dies die Folge der Natur der Operationen, welche sie bezeichnen, oder der Substrate, auf welche diese Operationen angewendet werden? Es ist eine heutzutage von den Mathematikern anerkannte Tatsache oder wenn man lieber will, ein Princip, dass die Gültigkeit der algebraischen Analyse nicht von der Interpretation der angewendeten Symbole, sondern lediglich von den Gesetzen ihrer Combination abhängt. Wenn eine analytische Formel gegeben ist, so ist jede Interpretation, welche nicht die Richtigkeit der angenommenen Verhältnisse angreift, gleich zulässig, und es kann diese Formel bei der einen Interpretation die Lösung einer auf die Eigenschaften der Zalen bezüglichen Frage, bei einer anderen die eines geometrischen Problems darstellen, bei einer dritten die einer Frage der Dynamik oder der Optik.[1]) Sehen wir ab von allen diesen möglichen Interpretationen, so bleibt ein System von Operationen mit besonderen Eigenschaften übrig. Der Analytiker berücksichtigt bei der Behandlung seiner Formeln nur die dabei zur Anwendung kommenden Operationen, ohne sich um die mannigfaltigen Interpretationen, deren sie fähig sind, zu kümmern. Die abstracte und allgemeine Mathematik hat somit nicht,

---

[1]) *The mathematical analysis*, Einleitung.

wie man es so oft wiederholt hat, quantitative, numerische, geometrische oder mechanische Begriffe zum Gegenstande, vielmehr Operationen an und für sich betrachtet, unabhängig von den verschiedenen Inhalten, auf welche sie anwendbar sind.

Man nehme z. B. die Addition. Es ist in der Tat eine Operation, welche in mannigfachen Formen erscheint. So besteht die Addition der Zalen in der Vereinigung der Einheitsgruppen, die Addition der Längen, Winkel, Flächen in der Aneinanderlegung dieser Gröſsen, die Addition der Kräfte in der Wirkung dieser Kräfte auf einen und denselben Punkt in einer und derselben Richtung. Das sind drei Operationen, welche mit denselben Namen bezeichnet werden, deren Zweck und Ausführungsmittel aber verschieden sind; keine von ihnen kann als Typus der anderen angesehen werden, die Addition im eigentlichen Sinne kann weder durch die eine noch durch die andere definirt werden. So sehr sie sich jedoch unter einander unterscheiden, so haben sie doch, wenn man von den besonderen Inhalten, zu denen sie gehören, absieht, gewisse Eigenschaften gemein, welche durch folgende Gleichungen ausgedrückt werden.

1) $a + b = a^1 + b$ für $a = a^1$
2) $a + (b + c) = (a + b) + c$
3) $a + b = b + a$
4) $a + 0 = 0 + a = a$.

Diese Eigenschaften machen zusammen das wahre Wesen der Addition aus, und man ist daher berechtigt, jede Operation, was immer ihr besonderer Gegenstand und ihr Ergebnis ist, so zu nennen, sobald sie diese vier Eigenschaften aufweist.[1])

Ist es hiernach in der Ordnung, die Anwendung der Analyse, wie man es bisher immer getan hat, auf diejenigen Fragen zu beschränken, bei welchen lediglich Quantitäts- und Gröſsenbegriffe in Betracht kommen? Kann man behaupten, dass

---

[1]) J. Houel, *Théorie élémentaire des qantités complexes.* Paris 1875.

die Analyse an sich jede nicht quantitative Interpretation ausschliefst, dass es z. B. nicht erlaubt ist, die bei dem deductiven Schlussverfahren von unserem Geist vollzogenen Operationen algebraisch auszudrücken und zu behandeln? Man darf hierauf nicht a priori antworten, aber ebensowenig darf man a priori über die Begründung einer logischen Analyse zur Tagesordnung übergehen. Die algebraische Logik wird ihr Recht auf Existenz beweisen dadurch, dass sie existirt. — Welche Methode ist zu ihrer Begründung zu befolgen? Der zu erreichende Zweck bestimmt diese Methode. Die Aufgabe ist, angesichts des oben formulirten allgemeinen Problems der Logik ein allgemeines Verfahren der Elimination der Mittelbegriffe aufzufinden, ohne Rücksicht auf deren Zal und Verknüpfung. Man darf daher nicht ohne weiteres die Formen des quantitativen Calcüls nehmen und die logischen Schlüsse gewaltsam in diese hineinpressen, denn das hiefse die Frage nach der Identität der Eigentümlichkeiten des eigentlichen und des logischen Calcüls a priori entscheiden. Vielleicht haben diese beiden Formen der Algebra nur gewisse generelle Eigenschaften gemein, und daneben eine jede von ihnen besondere, die ihr allein angehören. Es gilt daher die Tätigkeiten des Geistes bei der Bildung der allgemeinen Begriffe, der Urteile und der deductiven Schlüsse zu analysiren, sie symbolisch auszudrücken und die Eigenschaften dieser Symbole aus den Gesetzen ihrer Combination abzuleiten.

II. Boole verwendet drei Arten von Zeichen: Zalen- und Buchstabensymbole zum Ausdruck der Dinge als Gegenstände unserer Vorstellungen, 1 und 0, x, y, z, u. s. w.; Operarationszeichen, $+ - \times$ zum Ausdruck der geistigen Tätigkeiten, durch welche jene zur Bildung neuer aus denselben Elementen bestehender Conceptionen verknüpft werden; endlich das Zeichen der Gleichheit, $=$.

Die Zeichen 1 und 0 haben in dem System eine fest begrenzte Function: 1 bezeichnet „alles,“ 0 bezeichnet „nichts,“ jenes die Klasse, welche alle möglichen Wesen,

0 diejenige welche, wenn man so sagen kann, alles was nicht existirt umfasst. Hat man nun irgend eine Klasse zu bilden, welche alle ein gewisses Merkmal x besitzenden Individuen in sich begreift, so sind aus der Gesamtheit der Wesen alle diejenigen, welche das gegebene Merkmal besitzen, auszuscheiden. Der symbolische Ausdruck dafür wird sein

$$1\,x,$$

und da jede so gebildete Klasse notwendig eine bestimmte Abteilung der Gesamtheit der Dinge ist, kann man das Symbol der Gesamtheit in dem Ausdruck stillschweigend hinzudenken und einfach schreiben

$$x$$

Ebenso wird eine andere Klasse durch y, eine dritte durch z bezeichnet werden und so fort.

Es sei nun ein complexer Begriff zu bilden, z. B. „weiſse gehörnte Hammel.“ Hier hat man aus der Gesamtheit der Dinge sämtliche Hammel, alsdann aus der Gesamtheit der Hammel alle die, welche weiſs sind, endlich aus der Gesamtheit der weiſsen Hammel alle die, welche gehörnt sind, zu wälen. Ergibt die erste Operation die Klasse 1x oder x, so wird die zweite xy, die dritte xyz ergeben. xyz bezeichnet daher die Klasse, welche sämtliche die Attribute der Klasse x, der Klasse y und der Klasse z zugleich besitzende Individuen in sich begreift.

Betrachten wir diese Formel und die geistigen Operationen, welche sie bezeichnet, so werden wir alsbald erkennen, dass die Reihenfolge der Symbole darin gleichgültig ist. In der Tat, ob man zuerst die Klasse der Hammel bildet, um alsdann alle weiſsen Hammel daraus auszuscheiden und weiter aus dieser neuen Klasse alle gehörnten Hammel, oder ob man zuerst die Klasse der weiſsen Wesen bildet, um aus ihr darauf die gehörnten Hammel auszuscheiden, oder endlich ob man zuerst die Klasse der gehörnten Hammel bildet, um aus ihr die weiſsen Hammel auszuscheiden, das Resultat dieser dreifachen Operation wird immer dasselbe sein.

Die logischen Symbole haben mithin die Eigenschaft,

welche die Mathematiker die commutative nennen und welche wir ausdrücken durch die Formel

$$xy = yx. \qquad [1]^{1)}$$

Nehmen wir nun an, dass x und y genau dieselbe Bedeutung haben, so wird ihre Combination nicht mehr ausdrücken als jedes von beiden Symbolen allein. Wenn wir aus einer Gruppe von Dingen alle x ausscheiden und diese Operation mit der dadurch erhaltenen Klasse abermals vornehmen, so werden wir wieder dieselbe Klasse erhalten, nicht mehr und nicht weniger. Sagt man „Mensch, Mensch,“ „gut, gut,“ so ist es dasselbe als wenn man sagt „Mensch“ „gut.“ Daher die Formeln, welche in dem System eine bedeutende Rolle spielen

$$xx = x$$

$$\text{oder } x^2 = x. \qquad [2]$$

Aufser den bisher beschriebenen Operationen gibt es weiter solche, durch die wir verschiedene Teile zu einem Ganzen verbinden und ein Ganzes in Teile zerlegen. So sagen wir: „Die Engländer und die Franzosen,“ „die Franzosen oder die Engländer,“ „die Europäer mit Ausnahme der Engländer“ u. s. w. Die eine dieser Operationen ist die Umkehrung der anderen. Für die erste ist das Zeichen + für die zweite das Zeichen —:

$$x + y \; ; \; x - y.$$

In der Formel $x + y$ ist, wie man leicht sieht, die Anord-

---

1) Man könnte versucht sein, den Sinn der logischen Symbole xy, xyz misszuverstehen, denn es ist schwer, sich zu dem zum Verständnis des Booleschen Systemes notwendigen Grade der Abstraction zu erheben. In der mathematischen Algebra bedeutet xy, dass x mit y multiplicirt wird. Es wäre töricht, den logischen Ausdruck xy ebenso zu interpretiren. Aber die Eigenschaften der analytischen Formeln hängen, wie wir sahen, nicht von ihrer Interpretation sondern lediglich von dem Gesetze der Combination der in ihnen enthaltenen Symbole ab. Obwol daher die algebraische Multiplication, deren Grundgesetz $xy = yx$ ist, an sich keine Analogie hat mit dem durch xy dargestellten logischen Combinationsverfahren, konnte doch Boole mit Recht sagen, dass wenn der logische und der arithmetische Process auf dieselbe Weise ausgedrückt sind, ihre symbolischen Darstellungen demselben formellen Gesetz unterliegen.

nung der durch das Zeichen + vereinigten Symbole gleichgültig. Denn da $x + y$ eine Gesamtheit ausdrückt, welche aus allen in der Klasse x und y enthaltenen Einzelnen zusammengesetzt ist, so kommt wenig darauf an, ob wir schreiben $x + y$ oder $y + x$; in beiden Fällen ist das Resultat dasselbe. Die logischen Symbole haben daher die distributive Eigenschaft:

$$x + y = y + x \qquad [3]$$

oder auch

$$z(x + y) = zx + zy; \qquad [4]$$

was allen Gliedern eines Ganzen eigen ist, ist es einem jeden Gliede im besonderen, wie immer diese Glieder verteilt sein mögen, eine Eigenschaft, welche ohne Frage aus dem Wesen der symbolisch ausgedrückten Operation selbst folgt. Wenn eine Anzal Objecte, die als ein Ganzes angesehen werden, gegeben ist, so ist es einerlei, ob man z. B. die Klasse z herauszieht oder ob man die Gruppe in zwei Teile teilt, aus jedem von diesen alle z herausnimmt und die Resultate zu einem Aggregat verbindet.

Kehren wir jetzt zu den Symbolen 0 und 1 zurück. Wenn 0 nichts und 1 alles bedeutet, so ist klar, dass das formelle Gesetz der Algebra

$$0y = 0,$$

was auch der Wert oder Sinn von y ist, in der Logik gültig ist. 0y ist die Klasse, welche die der Klasse 0 und der Klasse y gemeinschaftlich angehörenden Einzelnen in sich begreift; es kann eine solche Klasse nicht geben. Ebenso ist, wie schon bemerkt,

$$1y =, y$$

was immer x sei, in der Logik wie in der Algebra richtig.

Gehen wir weiter. Wenn x eine bestimmte Klasse von Dingen und 1 die Gesamtheit des Seienden darstellt, so wird offenbar 1—x die x ergänzende Klasse bedeuten, d. h. die Summe der Dinge, welche man zu x hinzufügen muss, um 1 zu haben. Folglich wird 1—x das Gegenteil von x d. h. nicht-x bezeichnen. Wenn x z. B. Mensch bedeutet, so wird 1—x nicht-Mensch bedeuten.

Jetzt ist leicht zu sehen, dass das von den Logikern Gesetz des Widerspruchs genannte Axiom, welches sie für ein ursprüngliches und unableitbares Denkgesetz halten, eine Folge des obigen Gesetzes ist:

$$x^2 = x.$$

Denn wenn wir dieser Gleichung die gleichwertige

$$x^2 - x = 0$$

substituiren, so erhalten wir

$$x\ (1 - x) = 0$$

Das Product x (1—x) bezeichnet die Klasse der Dinge, welche zugleich x und 1—x oder nicht x sind; dieses Product ist gleich 0; mit anderen Worten: Dinge welche zugleich x und 1—x d. h. x und nicht-x sind, gibt es nicht.

Gehen wir nun zur symbolischen Darstellung der Urteile über. Die logischen Urteile sind entweder primäre oder secundäre; jene drücken Verhältnisse unter Dingen, diese Verhältnisse unter Urteilen aus. Wir beschäftigen uns zunächst mit den primären.

Vor allem ist eine allgemeine Methode erforderlich, zum Ausdruck aller denkbaren Gestalten einer Objectgruppe, welche ein Glied des primären Urteils bilden können.

Wenn die Klasse durch Eigenschaften bestimmt ist, welche allen darin enthaltenen Einzelnen gemeinsam sind, so wird man sie durch einen einfachen Ausdruck darstellen, in welchem die Symbole wie in der algebraischen Multiplication nebeneinander stehen. Besteht sie dagegen aus einer Vereinigung verschiedener Dinge, deren jedes durch eine besondere Eigenschaft bestimmt ist, so müssen diese Teile jeder für sich bezeichnet und dann durch das Zeichen + verbunden werden; ist die Gruppe durch die Ausschliefsung gewisser Teile bestimmt, so muss das Zeichen — vor die ausgeschlossenen Teile gesetzt werden.

In den disjunctiven Sätzen „die Dinge welche x oder y sind,“ wird man zwei Symbole haben, entsprechend den Dingen, welche x und nicht y und den Dingen welche y und nicht x sind:

$$x(1-y) + y(1-x)$$

Wenn x und y nebeneinander existiren können, so hat man

$$xy + x(1-y) + y(1-x)$$

die Darstellung aller in diesem Fall möglichen Alternativen.

Der vollständige Ausdruck der dreifachen Alternative entweder x oder y oder z wird demgemäfs sein

$$x(1-y)(1-z) + y(1-x)(1-z) + z(1-x)(1-y),$$

sobald die durch x, y und z bezeichneten Klassen sich gegenseitig ausschliefsen, und

$$xyz + x(1-y)(1-z) + y(1-x)(1-z) + z(1-x)(1-y),$$

wenn sie sich nicht ausschliefsen.

Wie hat man nunmehr die primären Urteile auszudrücken? Es sind verschiedene Fälle zu unterscheiden:

1) Subject und Prädicat sind beide allgemein — in diesem Fall hat man jedes von beiden für sich zu bezeichnen und die beiden alsdann durch das Zeichen = zu verbinden. 2) Das Prädicat ist particular. Z. B. alle Menschen sind sterblich (einige Sterbliche). — Hier ist ein besonderes Symbol der Particularität nötig. Es möge v das Symbol einer Klasse sein, welche in allem unbestimmt ist aufser darin, dass etliche ihrer Glieder x sind; wir haben dann

$$y = vx$$

Man hat bei solchen Urteilen also Subject und Prädicat wie vorher auszudrücken, zum Prädicat jedoch das unbestimmte Symbol v zu setzen und beide Ausdrücke dann zu einer Gleichung zu verbinden. Ebenso hat man, im Fall der Satz disjunctiv ist:

$$x = v\{y(1-z) + z(1-y)\}$$

3) Allgemein-verneinende Urteile: Kein y ist x. Man verwandle den Satz in die gleichwertige Form. Alle x sind einige nicht-y und verfahre wie vorher, also:

$$x = v(1-y)$$

4) Particular-verneinende Sätze: Einige y sind nicht x. Man verwandle den Satz in die gleichwertige Form: Einige y sind einige nicht-x und verfahre den oben gegebenen Regeln gemäfs:

$$vy = v(1 - x)$$

Kurz, wenn das Urteil bejahend ist, drückt man Subject und Prädicat jedes für sich aus und macht aus beiden eine Gleichung; ist eines von beiden particular, setzt man das unbestimmte Symbol v dazu; ist das Urteil negativ, so drückt man seine eigentliche Bedeutung aus und fügt zu diesem Zweck die Negation zum Prädicat.

III. Was Boole wollte, ist nunmehr mit vollkommener Klarheit zu erkennen. Nicht eine Anwendung der Wissenschaft der Zalen auf die Logik beabsichtigt er; es hätte dazu der Annahme bedurft, dass die Gesetze jener auch bei dieser neuen Anwendung dieselben bleiben würden, was eine reine Hypothese gewesen wäre, zu der a priori nichts berechtigte. Vielmehr hat er es unternommen, eine algebraische Logik zu begründen, und er hat zu diesem Zwecke die Gesetze der logischen Symbole durch die Analyse der Operationen, welche sie bezeichnen, festgestellt, ganz unabhängig von den die numerischen Operationen beherrschenden Gesetzen. Die Gemeinsamkeit der Symbole in der logischen Wissenschaft und in der Wissenschaft der Gröfsen hat in keiner Weise die Identität oder die Gemeinsamkeit der Gegenstände dieser Wissenschaften zur Voraussetzung; befasst sich doch die eine mit unseren Begriffen von den Dingen, die andere mit den numerischen Verhältnissen der letzteren. Da jedoch die Gesetze und Eigenschaften der Symbole nicht unmittelbar von deren Interpretation abhängen, ist es statthaft und sogar vorteilhaft, auf verschiedenen Gebieten dieselben Symbole anzuwenden, wenn sie den gleichen formellen Gesetzen unterliegen.

Nicht a priori somit, sondern a posteriori lässt sich die Correspondenz zwischen den Symbolen der gewöhnlichen und denen der logischen Algebra nachweisen. Die einen wie die anderen sind commutatif und distributif. Daraus folgt, dass man in der Logik die Gleichungen addiren und subtrahiren und ihre Glieder umstellen kann wie in der mathematischen Algebra, und ebenso folgt ferner, dass, wenn

zwei Klassen x und y identisch sind, d. h. wenn alle Glieder der einen auch die Glieder der anderen sind, dass man aus

$$x = y$$

welche Eigenschaft auch immer z bedeute, schliefsen kann

$$zx = zy,$$

das formelle Äquivalent des algebraischen Gesetzes, demzufolge die beiden Seiten einer Gleichung gleich bleiben, wenn beide mit derselben Gröfse multiplicirt werden.

Die Vergleichung der beiden Zeichensysteme zeigt jedoch auch, dass sie sich nicht vollkommen entsprechen, oder, wenn man lieber will, dass jedes von beiden seine besonderen specifischen Eigenschaften hat. So schliefst man in der Algebra von $zx = zy$ auf $x = y$, wogegen ein diesem Gesetz genau entsprechendes in der Logik nicht vorhanden ist. Denn wenn die Glieder einer Klasse x, welche ein gewisses Merkmal z besitzen, identisch sind mit denen einer Klasse y, welche dasselbe Merkmal z besitzen, so folgt daraus nicht, dass sämtliche Glieder der Klasse x mit denen der Klasse y identisch sind. Mit andern Worten aus $zx = zy$ kann man in der Logik nicht $x = z$ schliefsen. Und weiter. Alle logischen Symbole sind, wie wir sahen, ausnahmslos dem ursprünglichen und unableitbaren Gesetz der Dualität unterworfen:

$$x^2 = x$$

Dieses Gesetz aber ist der Logik eigentümlich und in der Algebra nicht allgemein anwendbar. Nur bei zwei Zalenwerten, 1 und 0, ist es gültig.

$$0^2 = 0$$
$$1^2 = 1,$$

in der Algebra hat also die Gleichung $x^2 = x$ keine anderen Wurzeln als 0 und 1.

Die logische und die numerische Algebra fallen hiernach nicht gänzlich zusammen, man müsste denn der gewöhnlichen Algebra Gewalt antun und annehmen, dass die Quantitätssymbole lediglich die Werte 0 und 1 zulassen. In diesem Falle würden allerdings die beiden Systeme

gleiche Gesetze, gleiche Axiome und gleiche Methoden haben[1]) und nur in der Interpretation verschieden sein.

IV. Wir kennen die Grundgesetze der geistigen Operationen und wir haben sie symbolisch ausgedrückt. Wie soll nun der logische Calcül vor sich gehen?

Es ist klar, dass die logischen Symbole an gewisse Bedingungen der Interpretirbarkeit gebunden sind. So bedeutet $x + y$, dass x und y, obwol sie durch das Additionszeichen verknüpft sind, einander ausschliefsen, d. h. dass kein zur Klasse x gehöriges Einzelnes sich zugleich in der Klasse y befindet. Es ist unbestreitbar, dass, wenn man bei dieser Behandlung der logischen Symbole diesen besonderen Bedingungen der Interpretirbarkeit Rechnung trägt, ein logischer Calcül unmöglich zu Stande kommt. Lässt man sie andrerseits aufser Acht und nimmt man lediglich auf die aus der Combination der Symbole sich ergebenden formellen Gesetze Rücksicht, so wird man zu Resultaten gelangen, welche jedes Sinnes bar sind. Dies aber widerstrebt durchaus den Gewohnheiten unseres Geistes; in dem syllogistischen Schlussverfahren treffen wir bei jedem Schritt, den wir vorwärts tun, auf ein verständliches Urteil. — Aber die Regeln des symbolischen Schliefsens sind nicht die des nicht symbolischen Schliefsens. Die Mathematiker verwenden häufig, um zu verständlichen Resultaten zu gelangen, Symbole wie $\sqrt{-1}$, welche an sich keiner Interpretation fähig sind. Es ist zu ihren Rechnungen nichts weiter erforderlich, als dass den in der Bezeichnung der Data zur Anwendung kommenden Symbolen eine feste Bedeutung beigelegt wird, und dass das Endresultat eine Interpretation erfahren kann, welche der der Data entspricht. Alsdann kommt, wenn nur die Beweisführung den Gesetzen der Combination der Symbole gemäfs ist, wenig darauf an,

[1]) Diese Bemerkung ist zum Verständnis von Booles System von der gröfsten Wichtigkeit. Wie wir sogleich sehen werden, ist sie der Schlüssel seines logischen Calcüls.

ob das zwischen den Data und der Conclusion Liegende interpretirt werden kann oder nicht.

Man muss somit, will man einen logischen Calcül ermöglichen, von der Bedeutung absehen, welche man den Symbolen in den Sätzen, von denen man ausgeht, gegeben hat. Aber das ist noch nicht genug. Wie wir sahen, lässt jede Art von Urteilen sich durch Gleichungen mit den Symbolen x, y, z ausdrücken, und es unterliegen diese letzteren denselben formellen Gesetzen wie ein System von quantitativen Symbolen für die Werte 0 und 1. Mithin kann man, da das Schlussverfahren lediglich von den Gesetzen der Symbole und nicht von der Art, wie sie interpretirt werden, abhängt, die logischen Symbole behandeln wie wenn sie Quantitätssymbole der bezeichneten Art wären. Daher die Hauptregel in Booles Theorie: „Man sehe ab von der logischen Interpretation der Symbole in der gegebenen Gleichung, verwandele sie in quantitative Symbole für die Werte 0 und 1, unterwerfe sie so allen erforderlichen Auflösungsmethoden und gebe ihnen schliefslich ihre logische Bedeutung wieder."

Jeder algebraische Ausdruck, der das Symbol x enthält, heifst Function von x, f (x); jeder algebraische Ausdruck mit zwei Symbolen, x und y, heifst Function von x und y, f (x, y) und so fort. Demnach bezeichnet f (x) irgend eine der folgenden Functionen:

$$x,\ 1-x,\ \frac{1+x}{1-x}\ \text{u. s. w.}$$

und f (x, y) ebenso irgend eine der Formen

$$x+y,\ x-2\,y,\ \frac{x+y}{x-2\,y}\ \text{u. s. w.}$$

In derselben Weise wird, wenn wir in einer Function von x dieses in 1 verwandeln, das Resultat die Form f (1), und verwandeln wir in derselben Function x in 0, die Form f (0) annehmen. Bezeichnet z. B. f (x) die Function $\frac{a+x}{a-2\,x}$, so wird f (1) bedeuten $\frac{a+1}{a-2}$ und f (0) $\frac{a.}{a.}$

*Definition.* Eine Function f (x), in welcher x ent-

weder ein logisches Symbol ist oder ein Quantitätssymbol für die Werte 0 und 1, heifst entwickelt, wenn sie auf die Form $ax + b(1 - x)$ zurückgeführt ist, in welcher a und b so bestimmt sind, dass das Ergebnis gleich wird der Function, aus welcher diese Form abgeleitet worden ist.

*Aufgabe I.* — Es soll eine Function x entwickelt werden, in welcher x ein logisches Symbol ist.

Es sei $f(x) = ax + b(1 - x)$

Für $x = 1$ erhalten wir $f(1) = a$.

Für $x = 0$ erhalten wir $f(0) = b$.

Setzen wir für a und b in der ersten Gleichung ihre Werte ein, so erhalten wir:

$$f(x) = f(1)\,x + f(0)\,(1 - x). \qquad [1.]$$

Dies ist die verlangte Entwicklung; die rechte Seite der Gleichung stellt genau die Function f (x) dar, welches immer deren Form ist, denn x lässt nur die Werte 0 und 1 zu, und für jeden dieser Werte nimmt die Entwicklung

$$f(1)\,x + f(0)\,(1 - x)$$

denselben Wert an wie die Function f (x). Ist z. B. die Entwicklung der Function

$$\frac{1 + x}{1 + 2x}$$

verlangt, so erhalten wir für $x = 1$

$$f(1) = \frac{2}{3}$$

für $x = 0$

$$f(0) = 1.$$

Also

$$\frac{1 + x}{1 + 2y} = \frac{2}{3}\,x + (1 - x.)$$

*Aufgabe 2.* — Es soll eine Function entwickelt werden, welche eine beliebige Anzal logischer Symbole enthält.

Es seien zunächst zwei Symbole gegeben, f (x, y). Wenn wir nun f (x,y) als eine Function von x allein betrachten und es nach dem vorangehenden allgemeinen Satz entwickeln, so haben wir

$$f(x, y) = f(1, y)\, x + f(0, y)\,(1-x) \qquad [2.]$$

wo f (1,y) und f (0,y) das bezeichnen, was aus der gegebenen Function wird, sobald wir statt x schreiben 1 und 0.

Nehmen wir nun den Coefficienten f (1, y) und betrachten ihn als eine Function von y, so ergibt die Entwicklung

$$f(1, y) = f(1, 1,)\, y + f(1, 0)\,(1-y) \qquad [3.]$$

wo $f(1_1\ 1)$ und $(1_1\ 0)$ bezeichnen, was aus f (1, y) wird, wenn man y = 1 und 0 setzt.

Ebenso ergibt die Entwicklung des Coefficienten f (0, y):

$$f(0, y) = f(0,1)\, y + f(0, 0)\,(1-y) \qquad [4.]$$

Setzen wir nunmehr in [2] für f (1, y) und f (0, y) ihre in [3] nnd [4] gegebenen Werte ein, so erhalten wir

$$f(x, y) = f(1,1)\ x\, y + f(1,0)\ x\ (1-y) + f(0,1)\ (1-x)\, y + f(0,0)\ (1-x)\ (1-y) \qquad [5.]$$

Dies ist die verlangte Entwicklung. f (1, 1) bezeichnet das, was aus f (x, y) wird, wenn man x = 1 und y = 1 setzt; f (1, 0) das, was daraus wird, wenn man x = 1, y = 0 setzt, und so fort.

Wenn z. B. f (x, y) die Function

$$\frac{1-x}{1-y}$$

bezeichnet, so finden wir:

$$f(1,1) = \frac{0}{0},\ f(1,0) = \frac{0}{1} = 0,\ f(0,1) = \frac{1}{0},\ f(0,0) = 1,$$

und es ist daher die Entwicklung der gegebenen Function:

$$\frac{0}{0}\, x\, y + 0\, x\, (1-y) + \frac{1}{0}\,(1-x)\, y + 1\ (1-x)\,(1-y).$$

Man kann hieraus eine allgemeine Regel für die Entwicklung jeder beliebigen Function der Symbole x, y, z entnehmen:

1) Man bildet die Constituenten[1]) auf folgende Weise:

---

[1]) Boole nennt Constituent einer Entwicklung jedes Glied wie x y x (1 — y) u. s. w. und Coefficient jedes Glied wie f (1, 1) f (1, 0) u. s. w.

der erste Constituent ist das Product der Symbole; um den zweiten zu bilden, verwandele man in diesem Product ein Symbol y in $1 - y$; um den dritten und vierten zu bilden, verwandele man in dem ersten und zweiten ein Symbol x in $1 - x$; um den fünften, sechsten, siebenten und achten zu bilden, verwandele man in den vier ersten ein anderes Symbol z in $1 - z$, und so fort, bis die Zal der möglichen Veränderungen erschöpft ist.

2) Man findet den Coefficienten eines beliebigen Constituenten in folgender Weise. Wenn dieser Constituent x als Factor enthält, so verwandelt man in der ursprünglichen Function x in 1, enthält er den Factor $1 - x$, so verwandelt man in der ursprünglichen Function x in 0. Dasselbe Verfahren beobachtet man hinsichtlich der übrigen Symbole y, z u. s. w. So wird z. B. der Coefficient des Constituenten $(1 - x)\ (1 - y)\ z$ sein $f\ (0,0,1)$.

Die Summe der Constituenten, jeder mit dem ihm zugehörigen Coefficienten multiplicirt, ist die verlangte Entwicklung.

Man beachte, dass jeder beliebige Constituent einer gegebenen Entwickelung dem Gesetz der Dualität, $t\ (1 - t) = 0$, entspricht, dass das Product zweier verschiedener Constituenten $= 0$ und die Summe sämtlicher Constituenten $= 1$ ist.

V. Es handelt sich nun um die Interpretation dieser Formeln. Da jede Entwicklung einer Function zweierlei Elemente, Constituenten und Coefficienten enthält, muss die Frage geteilt werden. Wir müssen zunächst die Interpretation der Constituenten finden und uns dann fragen, von welchem Einfluss die mit ihnen verbundenen Coefficienten auf ihre Interpretation sind.

Die Constituenten einer entwickelten Function der logischen Symbole x,y u. s. w. sind interpretirbar und bezeichnen die einander ausschliefsenden Teile der in Rede stehenden Totalität, welche durch die Bejahung und die Verneinung der mit x,y u. s. w. ausgedrückten Symbole gebildet werden.

Nehmen wir der Deutlichkeit halber an, dass die entwickelte Function nur die Symbole x und y enthalte. Wir haben alsdann vier Constituenten

$$xy,\ x\,(1-y)\ ,\ (1-x)\,y\ ,\ (1-x)\,(1-y).$$

Der erste, xy, stellt diejenigen Dinge dar, welche sowol die durch x als die durch y bezeichneten Eigenschaften hat; der zweite, x (1 − y) diejenigen, welche das Merkmal x, aber nicht das Merkmal y besitzen, (1 − x) y diejenigen, welche y aber nicht x sind; der vierte endlich diejenigen, welche weder das eine noch das andere sind. Die vier Constituenten stellen somit alle einzelnen Klassen dar, welche durch Bejahung und durch Verneinung der mit x und mit y bezeichneten Eigenschaften gebildet werden können. Diese Klassen erschöpfen, wie leicht ersichtlich, die Gesamtheit der Dinge, denn es gibt kein Object, das nicht durch das Vorhandensein oder das Nichtvorhandensein einer gegebenen Eigenschaft definirt werden könnte, und es gibt folglich kein einzelnes Ding, das nicht in eine der vier durch die möglichen Combinationen der beiden gegebenen Klassen x und y und ihrer Gegenteile bestimmten Klassen gestellt werden könnte.

Auf den Gesetzen der Constituenten und der Art ihrer Interpretation beruht nun Analyse und Interpretation der logischen Gleichungen.

Es sei die logische Gleichung V = 0 folgendermaſsen entwickelt:

$$axy + bx\,(1-y) + c\,(1-x)\,y + d\,(1-x)\,(1-y) = 0 \quad [1],$$

wo a, b, c, d numerisch bestimmte, constante Coefficienten sind.

Nehmen wir nun an, dass irgend einer der Coefficienten, z. B. a nicht gleich 0 ist. Wenn wir dann jede Seite der Gleichung mit dem Constituenten dieses Coefficienten xy multipliciren, so erhalten wir

$$axy = 0,$$

mithin, da a nicht = 0 ist.

$$xy = 0,$$

ein Ergebnis, welches unabhängig ist von der Natur der übrigen Coefficienten der Entwicklung und logisch interpretirt bedeutet: es gibt kein Individuum, welches zugleich zu der durch x und zu der durch y bezeichneten Klasse gehört.

Auf diese Weise haben wir, wenn der Coefficient b nicht gleich 0 ist:

$$x\,(1 - y) = 0$$

d. h. es gibt kein Individuum, welches zu gleicher Zeit zur Klasse x gehört und zur Klasse y nicht gehört.

Die Summe der so für jedes Glied einer Entwicklung, dessen Coefficient nicht gleich 0 ist, gewonnenen einzelnen Interpretationen ergibt die vollständige Interpretation der Gleichung $V = 0$; daher folgende Regel für die Analyse: Man entwickele die Function V und setze gleich 0 jeden Constituenten, dessen Coefficient nicht 0 ist. Die Zusammenfassung der Interpretationen der einzelnen Resultate bildet die Interpretation der gegebenen Gleichung.

Es sei nun die andere, ergänzende Gleichung gegeben: $V = 1$.

Offenbar stellen die Constituenten, welche in der Entwicklung dieser Gleichung vorkommen, Klassen dar, deren Summe die Gesamtheit der Dinge bildet; haben wir z. B.:

$$xyz + (1 - x)\,y\,(1 - z) + (1 - x)\,(1 - y)\,z + (1 - x)\,(1 - y)\,(1 - z) = 1,$$

so bedeutet dieser Ausdruck, dass in Bezug auf die durch x, y, z bezeichneten Eigenschaften sämtliche Dinge in vier Klassen eingeteilt werden, von denen die erste alle Dinge in sich begreift, welche zugleich x, y, z sind, die zweite alle diejenigen, welche y aber weder x noch z sind, die dritte alle diejenigen, welche z aber weder x noch y sind, endlich die vierte alle diejenigen, welche weder x noch y noch z sind; und dass jedes beliebige Ding einer dieser vier Klassen angehört.

Betrachten wir jetzt den Fall, wo die Function irgend einem logischen Symbol, w, gleich ist, $V = w$. Dieser Fall ist nicht willkürlich erdacht, er entspricht vielmehr einem

logischen Problem von der höchsten Allgemeinheit: Gegeben ist eine logische Gleichung, welche die Symbole x, y, z und w verbindet, verlangt der interpretationsfähige Ausdruck des Verhältnisses der durch w bezeichneten Klasse zu den durch die übrigen Symbole x, y, z u. s. w. bezeichneten Klassen.

Wenn wir die gegebene Gleichung, welches auch ihre Form sei, in Bezug auf w entwickeln, so erhalten wir eine Gleichung von der Form

$$Ew + E^1 (1 - w) = 0 \qquad [1]$$

wo E und $E^1$ Functionen der anderen Symbole bedeuten.

Wir haben also

$$E^1 = (E^1 - E) w$$

mithin

$$w = \frac{E^1}{E^1 - E} \qquad [2]$$

Wir haben nun die rechte Seite zu entwickeln und das Ergebnis nach der sogleich folgenden *Aufgabe III* logisch zu interpretiren.

Ist das Verhältnis der Klasse 1 – w zu den übrigen Klassen x, y, z u. s. w. verlangt, so leiten wir aus [1] ganz wie vorher ab

$$1 - w = \frac{E}{E - E^1},$$

eine Gleichung, welche ebenfalls nach der in *Aufgabe III* angegebenen Methode zu interpretiren ist.

*Aufgabe III.* — Es soll die Interpretation einer beliebigen logischen Gleichung von der Form w = V bestimmt werden, in welcher w das Symbol einer Klasse und V eine in ihrer Form ganz unbestimmte Function anderer Klassen ist.

Nehmen wir an, die rechte Seite der Gleichung w = V sei vollständig entwickelt. Jeder ihrer Coefficienten wird von einer der folgenden vier Arten sein.

1) Der Coefficient ist 1. — Da 1 das Symbol der Totalität ist und das Product zweier beliebiger Symbole die Individuen darstellt, welche den beiden durch die Symbole bezeichneten Klassen angehören, so muss jeder Con-

stituent, der die Einheit zum Coefficienten hat, ohne Einschränkung interpretirt werden.

2) Der Coefficient ist 0. Da in der Logik wie in der Arithmethik 0 *nichts* bezeichnet, so darf kein Teil der Klasse genommen werden, welche durch die Constituenten des Coefficienten 0 dargestellt ist.

3) Der Coefficient hat die Form $\frac{0}{0}$. — In der Arithmetik bezeichnet $\frac{0}{0}$ eine unbestimmte Zal. Analog wird dieses Symbol auch in der Logik eine unbestimmte Klasse bezeichnen.

Nehmen wir z. B. den Satz: „Nicht sterbliche Menschen existiren nicht,“ drücken wir ihn symbolisch aus und suchen wir nach den vorstehenden Gesetzen eine Definition der „sterblichen Wesen“ in Bezug auf „Menschen.“ Es sei y „Menschen,“ x „sterbliche Wesen,“ so wird der gegebene Satz in symbolischer Sprache lauten

$$y\,(1 - x) = 0,$$

und es soll daraus der Wert von x berechnet werden. Aus

$$y\,(1 - x) = 0$$

entnehmen wir

$$y - yx = 0$$

oder

$$yx = y$$

daher

$$x = \frac{y}{y}.$$

Entwickeln wir nun die rechte Seite, so ergibt sich

$$x = y + \frac{0}{0}\,(1 - y)$$

d. h. die Sterblichen (x) werden gebildet durch alle Menschen (y) nebst den Wesen, welche nicht Menschen sind, $(1 - y)$ mit dem Coefficienten $\frac{0}{0}$. Wir wissen aber nicht, ob dieser Rest alle Wesen umfasst, welche nicht Menschen

sind, oder nur einige, $\frac{0}{0}$ ist mithin das Symbol einer unbestimmten Klasse.

4) Endlich kann es geschehen, dass der Coefficient eines Constituenten zu keinem der vorangehenden drei Fälle gehört. Alsdann lässt er sich nicht ohne den folgenden Lehrsatz interpretiren.

*Lehrsatz.* — Ist eine Function V, deren Zweck die Darstellung einer Klasse oder einer Anzal von Objecten, w, ist, entwickelt, und entspricht der numerische Coefficient a irgend eines ihrer Constituenten dem Gesetze $a(1 - a) = 0$ nicht, so ist der betreffende Constituent gleich 0 zu setzen. —

Dies sind die allgemeinen Interpretationsregeln sowol für die Constituenten wie für die Coefficienten. Machen wir sie nun an einem concreten Beispiel anschaulich.

Gegeben ist folgende Definition: „Die verantwortlichen Wesen sind alle vernünftigen Wesen, welche frei sind oder ihre Freiheit freiwillig geopfert haben.“ Aus dieser Prämisse soll z. B. das Verhältnis gefolgert werden, in welchem die Vernünftigkeit zur Verantwortlichkeit, zur Freiheit, zum freiwilligen Opfern der Freiheit, und ihren Gegenteilen steht.

Es bezeichne

x die verantwortlichen Wesen,
y die vernünftigen „
z die freien „
w diejenigen, welche ihre Freiheit freiwillig geopfert haben.

Die beiden Alternativen: „vernünftige freie Wesen“ und „vernünftige Wesen, welche ihre Freiheit geopfert haben“ stehen im Verhältnis gegenseitiger Ausschliefsung. Der symbolische Ausdruck der Prämisse ist daher:

$$x = yz + yw \qquad [1]$$

Aus [1] gewinnen wir

$$y = \frac{x}{x + w}$$

entwickeln wir die rechte Seite und entfernen wir die Glieder, deren Coefficienten 0 sind, so erhalten wir

$$y = \frac{1}{2} xzw + xz (1-w) + x (1-z)w + \frac{1}{0} x$$

$$(1-z)(1-w) + \frac{0}{0}(1-x)(1-z)(1-w),$$

und wenn wir die Glieder, deren Coefficienten $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{0}$ sind, gleich 0 setzen.

$$y = xz (1-w) + xw (1-z) + v (1-x)(-z)(1-w); \quad [2]$$

$$xzw = 0. \quad [3]$$

$$x (1-z)(1-w) = 0. \quad [4]$$

Wenn wir interpretiren, so erhalten wir folgende drei Conclusionen:

1) Die vernünftigen Wesen sind alle verantwortlichen Wesen, welche frei sind, ihre Freiheit nicht freiwillig geopfert haben, oder welche ihre Freiheit freiwillig geopfert haben und also nicht frei sind, aufserdem eine unbestimmte Klasse von Wesen, welche nicht frei sind und ihre Freiheit nicht geopfert haben. [2]

2) Es gibt keine Wesen, welche gleichzeitig verantwortlich und frei sind und freiwillig ihre Freiheit geopfert haben. [3]

3) Es gibt keine Wesen, welche gleichzeitig verantwortlich sind, nicht frei sind und ihre Freiheit nicht geopfert haben. [4]

Man kann weiter aus [3] schliefsen:

$$xw = \frac{0}{z} = 0z + \frac{0}{0}(1-z)$$

$$\text{oder } xw = v (1-z);$$

und aus [4]: [5]

$$x (1-w) = \frac{0}{1-z} = oz + o (1-z)$$

$$\text{oder } x (-w) = vz;$$

d. h.: die verantwortlichen Wesen, welche freiwillig ihre Freiheit geopfert haben, sind gewisse Nichtfreie; die verantwortlichen Wesen, welche nicht freiwillig ihre Freiheit geopfert haben, sind gewisse freie Wesen.

Auf Grund derselben Definition der verantwortlichen Wesen kann man die Bestimmung der unvernünftigen Wesen verlangen. Wir haben dann

$$1 - y = 1 - \frac{z}{z + w}$$

$$= \frac{z + w - x}{z + w}$$

$$= \frac{1}{2} xzw + 0yz\ (1 - w) + 0x\ (1 - z)\ w + \frac{1}{0} x$$
$$(1 - z)\ (1 - w) + (1 - x)\ zw + (1 - x)\ z\ (1 - w)$$
$$+ (1 - x\ (1 - z)\ w + \frac{0}{0}(1 - x)\ (1 - z)\ (1 - w),$$

und beseitigen wir die Glieder, deren Coefficient 0 ist, und setzen gleich 0 diejenigen, welche zum Coefficienten $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{0}$ haben:

$$= (1 - x)\ zw + (1 - x)\ z\ (1 - w) + (1 - x)$$
$$(1 - z)\ w + v\ (1 - x)\ (1 - z)\ (1 - w)$$
$$= (1 - x)\ z + (1 - x)\ (1 - z)\ w + v\ (1 - x)(1 - z)$$
$$(1 - w).$$

Die directe Auflösung ist mithin: Die unvernünftigen Wesen umfassen alle nichtverantwortlichen Wesen, welche frei sind oder welche ihre Freiheit freiwillig verloren haben und nicht frei sind, und aufserdem eine unbestimmte Klasse von Wesen, welche weder verantwortlich noch frei sind und ihre Freiheit nicht freiwillig verloren haben.

Auf dieselbe Weise hätte die Bestimmung von z und nicht z, von w und nicht w in Bezug auf die übrigen Glieder der als Prämisse gegebenen Definition verlangt und durch dasselbe Verfahren gefunden werden können. Das gegebene Beispiel genügt, um die Ergiebigkeit des logischen Calcüls für den unmittelbaren Schluss zu zeigen.

VI. In den bisher betrachteten Schlüssen erscheinen sämtliche Elemente der Prämisse in der Conclusion wieder, nur die Reihenfolge und die Verbindungen derselben sind verändert. Dies ist jedoch nicht der einzige Typus des deductiven Schliefsens, denn häufig stellt sich die Aufgabe so, dass mehrere Prämissen gegeben sind und daraus ein Verhältnis zwischen beliebigen Elementen derselben gewonnen werden

soll. In diesem Fall kehren nicht alle Elemente der Prämissen im Schlusssatz wieder; etliche von ihnen, die Mittelbegriffe, deren Function es ist, die verlangte Beziehung zu erweisen, werden eliminirt. Wir brauchen daher eine allgemeine Methode zur Eliminirung einer beliebigen Anzal von Mittelbegriffen aus einem beliebig großen Systeme in Form von Gleichungen gegebener Prämissen.

Es sei eine logische Gleichung $f(x) = 0$. Entwickeln wir die linke Seite, so haben wir:

$$f(1)\,x + f(0)\,(1 - x) = 0$$

oder

$$\{f(1) - f(0)\}\,x + f(0) = 0; \qquad [1]$$

also

$$x = \frac{f(0)}{f(1) - f(0)}$$

und

$$(1 - x) = \frac{f(1)}{f(1) - f(0)}$$

Setzen wir diese Ausdrücke für x und $1 - x$ in der fundamentalen Gleichung $x\,(1 - x) = 0$ ein, so haben wir:

$$\frac{f(0)\,f(1)}{\{f(0) - f(1)\}^2} = 0$$

oder

$$f(1)\,f(0) = 0. \qquad [2]$$

Man sieht, dass auf diese Weise die Eliminirung tatsächlich zwischen der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$ und der allgemein gültigen Gleichung $x\,(1 - x) = 0$ stattgefunden hat. Es ist daher, um die Eliminirung eines Gliedes zu ermöglichen, nur eine einzige Prämisse oder Gleichung erforderlich; das notwendige Denkgesetz ersetzt die andere Prämisse oder Gleichung.

Man kann auch auf folgende Weise verfahren. Es sei wie vorher die Gleichung

$$f(1)\,x + f(0)\,(1 - x) = 0.$$

Multipliciren wir die Gleichung zuerst mit x, alsdann mit $1 - x$, so erhalten wir

$$f(1)\,x = 0,$$
$$f(0)\,(1 - x) = 0.$$

Aus diesen Gleichungen gewinnen wir durch Auflösung und Entwicklung:

$$f(1) = \frac{0}{x} = \frac{0}{0}(1 - x$$

$$f(0) = \frac{0}{1-x} = \frac{0}{0}\ x,$$

d. h. 1) Alle in der durch f (1) bezeichneten Klasse enthaltenen Individuen sind nicht x; 2) alle in der durch f (0) bezeichneten Klasse enthaltenen Individuen sind x. Mithin gibt es keine Individuen, welche zugleich in der Klasse f(1) und in der Klasse f (0) enthalten sind, oder symbolisch

$$f(1)\ f(0) = 0.$$

Die Regel lautet also: Um aus einer gegebenen Gleichung ein Symbol x zu eliminiren, „gebe man diesem Symbol, nachdem man, wenn es nötig ist, sämtliche Glieder der Gleichung auf dieselbe Seite gebracht hat, nacheinander den Wert 1 und 0 und multiplicire die so gewonnenen Gleichungen mit einander.

Fassen wir jetzt die allgemeine Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

ins Auge, deren linke Seite jede beliebige Function von x,y und anderen Symbolen bedeutet. Dem Dargelegten zufolge ist das Ergebnis der Eliminirung von y in dieser Gleichung:

$$f(x,1)\ f(x,0) = 0.$$

Wenn wir nun ebenso, wie wir dieses Resultat dadurch gewannen, dass wir in der gegebenen Gleichung y nacheinander in 1 und in 0 verwandelten und die Resultate mit einander multiplicirten, in ihm wiederum x nacheinander in 1 und in 0 verwandeln und die so entstehenden Gleichungen mit einander multipliciren, so haben wir

$$f(1,1)\ f(1,0)\ f(0,1)\ f(0,0) = 0$$

als Endergebnis der Eliminirung. Nun sind aber die vier Factoren der linken Seite dieser Gleichung die vier Coefficienten der vollständigen Entwicklung von f (x, y), der linken Seite der gegebenen Gleichung.

Daher die Regel: Um aus einer Gleichung von der Form V = 0 eine beliebige Zal von Symbolen x, y u. s. w. zu eliminiren, entwickele man die linke Seite dieser Gleichung vollständig in Constituenten der gegebenen Symbole,

multiplicire alsdann alle Coefficienten dieser Constituenten und setze das Product gleich 0.

Wenden wir diese Regeln auf ein Beispiel an. Es sei gegeben die Definition des Reichtums von Senior: „Reichtum besteht in dem, was übertragbar und begrenzt im Vorrat ist und entweder Vergnügen hervorbringt oder Schmerz verhütet."

Bezeichnen wir Reichtum durch w,
das im Vorrat Begrenzte „ s,
das Übertragbare „ t,
das Vergnügen Hervorbringende „ p,
das Schmerz Verhütende „ r,

so haben wir:

$$w = st \{pr + p(1-r) + r(1-p)\}$$

oder

$$w = st \{p + r(1-p)\}$$

Aus dieser Gleichung können wir jedes Symbol eliminiren, das wir außer Betracht lassen wollen.

Was wird zunächst aus dem Ausdruck von w, wenn r eliminirt wird? Wenn wir alle Glieder der Gleichung auf die linke Seite bringen, so haben wir:

$$w - st(p + r - rp) = 0.$$

Wenn $r = 1$ ist, so wird die linke Seite $w - st$, ist $r = 0$, wird sie $w - stp$; daher erhalten wir nach der Eliminationsregel:

$$(w - st)(w - stp) = 0,$$

oder

$$w - wstp - wst + stp = 0,$$

also

$$w = \frac{stp}{st + stp - 1},$$

und entwickeln wir die rechte Seite dieser Gleichung:

$$w = stp + \frac{0}{0}\, st(1-p).$$

Dies bedeutet den oben erörterten Interpretationsregeln zufolge: Reichtum besteht aus allen im Vorrat limitirten, übertragbaren und Lust hervorbringenden Dingen und außerdem aus einem unbestimmten Rest im Vorrat limitirter, übertragbarer und nicht Lust hervorbringender Dinge.

Nehmen wir zweitens an, dass die Bestimmung von s in Bezug auf w, auf t und auf p, ganz abgesehen von dem Verhältnis zwischen s und r, verlangt sei. Aus der Gleichung

$$w - s\ (wt + wtp - tp) = 0$$

gewinnen wir

$$s = \frac{w}{wt + wtp - tp}$$

und entwickelt:

$$s = wtp + wt\ (1 - p) + \frac{1}{0} w\ (1 - t)\ p + \frac{1}{0} w (1 - t)\ (1 - p) + 0\ (1 - w)\ tp + \frac{0}{0} (1 - w)\ t\ (1 - p) + \frac{0}{0}\ (1 - w)\ (1 - t)\ p + \frac{0}{0} (1 - w)\ (1 - t)\ (1 - p)$$

d. h. die im Vorrat begrenzten Dinge sind aller übertragbare und Vergnügen hervorbringende Reichthum, aber übertragbare und nicht Vergnügen hervorbringende Reichtum, aufserdem eine unbestimmte Anzal von Dingen, welche nicht Reichtum aber welche übertragbar sind, ohne Vergnügen hervorzubringen, oder nicht übertragbar sind, aber Vergnügen hervorbringen, oder welche weder übertragbar sind noch auch Vergnügen hervorbringen.

Aus den Gliedern, deren Coefficienten $\frac{1}{0}$ sind, können wir aufserdem zwei unabhängige Verhältnisse gewinnen:

1) Es gibt keinen Reichtum, welcher unübertragbar ist und gleichzeitig Vergnügen hervorbringt.

2) Es gibt keinen Reichtum, welcher unübertragbar ist und kein Vergnügen hervorbringt.

Wenn zwei oder mehr Symbole aus einer gegebenen Gleichung eliminirt werden sollen, so können wir entweder die oben beschriebene Methode anwenden:

$$f\ (1,1)\ f\ (1,0)\ f\ (0,1)\ f\ (0,0) = 0$$

oder sie einzeln, nacheinander, in beliebiger Reihenfolge eliminiren.

Aus der Gleichung

$$w = st(p + r - pr)$$

haben wir r eliminirt, und erhalten

$$w - wst - wstp + stp = 0.$$

Soll gleichzeitig r und t eliminirt werden, so können wir das Ergebnis der Elimination von r zum Ausgangspunkt nehmen und t daraus eliminiren. Ist $t = 1$, so wird die linke Seite der Gleichung

$$w - ws - wsp + sp,$$

ist $t = 0$:

$$w.$$

Multipliciren wir beides mit einander und setzen wir das Product gleich 0, so haben wir

$$w(w - ws - wsp + sp) = 0$$

oder

$$w - ws = 0$$

Also

$$w = \frac{0}{1 - s} = \frac{0}{0} s,$$

d. h.: Aller Reichtum ist quantitativ beschränkt.[1])

Auf dieselbe Weise würde man jedes andere Symbol aus der gegebenen Gleichung eliminiren.

VII. Die allgemeine Eliminationsmethode, deren Principien und Regeln im Vorstehenden dargelegt sind, ist nur auf eine einzige Gleichung anwendbar. In Wirklichkeit jedoch sind der Prämissen in einem deductiven Schlussverfahren meistens zwei, und an sich hindert nichts, dass ihre Zal eine unbegrenzte sei. Es erhebt sich daher jetzt die Frage, ob es möglich ist, in einem beliebig grofsen System von Prämissen eine beliebige Anzal von Symbolen zu eliminiren, oder mit andern Worten, ob es möglich ist, ein beliebiges System von logischen Gleichungen auf eine einzige, gleichwertige Gleichung zurückzuführen, auf welche die beschriebenen Methoden anwendbar sind. Die Reduction lässt sich mit Hülfe folgender Methode ausführen:

---

[1]) Bei allen vorangehenden Rechnungen muss man sich immer das Grundgesetz der logischen, nur die Zalenwerte 1 und 0 zulassenden Symbole vergegenwärtigen: $x^2 = x$.

*Erster Fall.* — Wenn $V_1 = 0$, $V_2 = 0$ Gleichungen von der Art sind, dass die Entwicklung ihrer linken Seiten nur Constituenten mit positiven Coefficienten enthält, so können sie durch Addition zu einer einzigen gleichwertigen Gleichung vereinigt werden.

In der Tat, wenn $At$ ein Glied der Entwicklung der Function $V_1$, $Bt$ das entsprechende Glied der Entwicklung von $V_2$ bezeichnet, und so fort, so wird das entsprechende Glied in der Entwicklung der aus der Addition der beiden gegebenen Gleichungen sich ergebenden Gleichung

$$V_1 + V_2 + \text{u. s. w.} = 0 \qquad [1]$$

sein

$$(A + B \text{ u. s. w.})\, t.$$

Da aber der Voraussetzung nach keiner der Coefficienten $A$, $B$ u. s. w. negativ ist, so wird der Gesamtcoefficient $A + B$ u. s. w. in der abgeleiteten Gleichung nur dann verschwinden, wenn die einzelnen Coefficienten $A$, $B$ u. s. w. sämtlich verschwinden. Es werden mithin alle Constituenten der besonderen Gleichungen $V_1 = 0$, $V_2 = 0$ u. s. w. in der Entwicklung der Gleichung [1] wiedererscheinen, und die Interpretation der letzteren äquivalent sein der Summe der Interpretationen der verschiedenen Gleichungen, aus welchen sie abgeleitet ist.

*Zweiter Fall.* — Wenn $V_1 = 0$, $V_2 = 0$ u. s. w. ein beliebiges System von Gleichungen repräsentiren, deren Glieder auf die linke Seite gebracht worden sind, so wird die Gesamtinterpretation des Systemes in der durch Addition der Quadrate der gegebenen Gleichungen entstandenen einen Gleichung

$$V_1^2 + V_2^2 + \text{u. s. w.} = 0$$

enthalten sein. Denn wenn die Entwicklung der Gleichung $V_1 = 0$ die Gleichung

$$a_1\, t_1 + a_2\, t_2 = 0$$

ergibt, in welcher $t_1$ $t_2$ u. s. w. die Constituenten und $a_1$ $a_2$ u. s. w. die entsprechenden Coefficienten sind, so ergibt die Entwicklung der Gleichung $V_2 = 0$:

$$a_1^2\, t_1 + a_2^2\, t_2 + \text{u. s. w.} = 0.$$

Mithin sind die Constituenten der Entwicklung der beiden Gleichungen $V_1^2 = 0$ und $V_2 = 0$ dieselben, und ihre Coefficienten sind positiv. Dasselbe gilt für die Gleichungen $V_2^2 = 0$ u. s. w.; woraus folgt, dass die Interpretation der Gleichung

$$V_1^2 + V_2^2 + \text{u. s. w.} = 0$$

der des Systems

$$V_1 = 0, \ V_2 = 0 \text{ u. s. w.}$$

äquivalent sein wird.

*Dritter Fall.* — Wenn die Gleichungen eines Systemes durch Quadrirung oder ein anderes Verfahren in eine solche Form gebracht sind, dass sämtliche Constituenten ihrer Entwicklung positive Coefficienten haben, so wird jede, durch Elimination gewonneue, abgeleitete Gleichung von derselben Art sein und durch Addition mit den anderen Gleichungen combinirt werden können.

Nehmen wir an, wir hätten aus einer Gleichung $V = 0$, auf deren entwickelter linken Seite kein Constituent einen negativen Coefficienten hat, ein Symbol x eliminirt, so kann die Entwicklung folgende Gestalt annehmen:

$$V_1 x + V_2 (1 - x) = 0,$$

wo $V_1$ und $V_2$ beide von der Form

$$a_1 t_1 + a_2 t_2 \ldots . + a_n t_n$$

sind und $t_1 \ t_2 \ldots t_n$ Constituenten der übrigen Symbole und $a_1 \ a_2 \ldots a_n$ positive Quantitäten oder Null sind. Das Ergebnis der Elimination ist

$$V_1 \ V_2 = 0,$$

und da keiner der Coefficienten von $V_1$ und von $V_2$ negativ ist, können in dem Producte $V_1 \ V_2$ negative Coefficienten nicht vorkommen. Folglich kann die Gleichung $V_1 \ V_2 = 0$ zu jeder anderen Gleichung mit positiven Coefficienten hinzugefügt werden, und die so gewonnene Gleichung wird die ganze Bedeutung derjenigen, aus denen sie gebildet ist, in sich enthalten.

Wir haben nun nur noch zu fragen, was für logische Gleichungen den drei Fällen entsprechen. Wir kennen die Grundgestalten des Urteils.

1) Diejenigen, deren Subject universell und deren Prädicat particular ist:

$$X = vY,$$

wo X und Y das Gesetz der Dualität erfüllen. Eliminiren wir v, so haben wir

$$X (1 - Y) = 0,$$

was dasselbe Gesetz erfüllt. Es ist zur Reduction solcher Urteile nicht erforderlich, sie ins Quadrat zu erheben.

2) Diejenigen, deren Subject und Prädicat beide universell sind:

$$X = Y,$$

wo X und Y jedes für sich dem Dualitätsgesetz entprechen. Schreiben wir nun die Gleichung in der Form $X - Y = 0$, und erheben wir sie ins Quadrat, so erhalten wir:

$$X - 2 XY + Y = 0$$

oder

$$X (1 - Y) + Y (1 - X) = 0, \qquad [2]$$

eine Gleichung, deren linke Seite dem Gesetz der Dualität genügt.

3) Diejenigen, deren Subject und Prädicat beide particular sind:

$$v X = v Y.$$

Hier ist v nicht willkürlich und kann daher nicht eliminirt werden; es bezeichnet tatsächlich *einige*. Wir müssen also die rechte Seite auf die linke bringen und die so entstehende Gleichung ins Quadrat erheben:

$$v X (1 - Y) + v Y (1 - X) = 0. \qquad [3]$$

Fassen wir diese verschiedenen Ergebnisse in eine einzige Regel zusammen: „Nachdem die Gleichungen so ausgedrückt sind, dass die Termini X und Y der typischen Formen dem Gesetz der Dualität entsprechen, verwandle man die Gleichungen

$X = vY$ in $X (1 - Y) = 0$,

$X = Y$ in $X (1 - Y) + Y (1 - x) = 0$

$vX = vY$ in $vX (1 - Y) + v Y (1 - X) = 0$."

Eine in der Form $X = 0$ gegebene Gleichung bedarf der Umwandlung nicht, und jede Gleichung von der Form $X = 1$ kann durch $1 - X = 0$ ersetzt werden.

Sobald die Gleichungen des gegebenen Systems in dieser Weise reducirt sind, können sie und ebenso die auf dem Wege der Elimination aus ihnen abgeleiteten Gleichungen durch Addition mit einer combinirt werden.

Wenden wir diese Regeln auf ein Beispiel an.

Die Prämissen seien die beiden folgenden geometrischen Sätze: 1. Ähnliche Figuren sind diejenigen, deren entsprechende Winkel gleich und deren entsprechende Seiten proportional sind. 2 In Dreiecken, deren entsprechende Winkel gleich sind, sind die entsprechende Seiten proportial und umgekehrt.

Bezeichnet man ähnlich mit s,
Dreiecke mit t,
gleiche Winkel habend mit q,
proportionale Seiten habend mit r,

so ergeben die Prämissen die Gleichungen

$$s = qr \qquad [1]$$
$$tq = tr. \qquad [2]$$

Bringt man alle Glieder dieser Gleichungen auf die linke Seite, erhebt beide ins Quadrat und addirt sie, so erhält man

$$s + qr - 2\,qrs + tq + tr - 2\,tqr = 0. \qquad [3]$$

Verlangt wird die Bestimmung der ungleichen Figuren durch t, q und r.

Aus der Gleichung [3] gewinnen wir:

$$s = \frac{tq + qr + rt - 2tqr}{2\,qr - 1}$$

Also

$$1 - s = \frac{qr - tq - rt + 2tqr - t}{2qr - 1;} \qquad [4]$$

Entwickeln wir die rechte Seite, so erhalten wir:

$$1 - s = 0tqr + 2tq\,(1 - r) + 2tr\,(1 - q) + t\,(1 - q)\,(1 - r) + 0\,(1 - t)\,qr + (1 - t)\,q\,(1 - r) + (1 - t)\,r\,(1 - q) + (1 - t)\,(1 - q)\,(1 - r). \qquad [5]$$

In dieser Entwicklung haben zwei Glieder den Coefficienten 2, sie sind daher gleich 0 zu setzen; beseitigt man ferner diejenigen Glieder, deren Coefficient 0 ist, so hat man

$$1 - s = t(1-q)(1-r) + (1-t)q(1-r) + (1-t)r(1-q) + (1-t)(1-q)(1-r). \qquad [5]$$

$$tq(1-r) = 0. \qquad [7]$$

$$tr(1-q) = 0. \qquad [8]$$

Die directe Interpretation dieser Gleichungen ist:

1) Die unähnlichen Figuren werden gebildet von allen Dreiecken, deren entsprechende Winkel nicht gleich und deren entsprechende Seiten nicht proportional sind; oder von den Nichtdreiecken mit gleichen Winkeln und nicht proportionalen Seiten; oder von den Nichtdreiecken mit proportionalen Seiten und ungleichen Winkeln; oder von den Nichtdreiecken mit ungleichen Winkeln und nicht proportionalen Seiten.

2) Es gibt keine Dreiecke, deren entsprechende Winkel gleich und deren entsprechende Seiten nicht proportional sind.

3) Es gibt keine Dreiecke, deren entsprechende Winkel ungleich und deren entsprechende Seiten proportional sind.

VIII. Alles Vorangehende bezieht sich ausschliefslich auf die primären Urteile (Vgl. § II). Es gibt aber auch Urteile, welche nicht Dinge oder Begriffe von Dingen zum Gegenstand haben, vielmehr für richtig oder unrichtig gehaltene Urteile. Diese secundären Sätze begreifen alle diejenigen Urteile unter sich, durch welche wir ein Verhältnis oder eine Abhängigkeit von Urteilen unter einander ausdrücken, z. B. Bedingungssätze wie: „wenn die Sonne scheint, wird der Tag schön sein,“ oder disjunctive Sätze, wie: „die Sonne wird scheinen oder die Partie aufgeschoben werden.“ Sätze dieser Art kommen im gewöhnlichen Denken ebenso häufig vor wie die primären, und selbst Moralisten und Metaphysiker denken weniger über die Dinge und deren Eigenschaften als über die die Wahrheiten und deren wechselseitigen Zusammenhang betreffenden Principien und Hypothesen. Eine allgemeine Methode der Behandlung der secundären Urteile ist darum von Wichtigkeit,

Alle Sätze dieser Art haben das gemeinsame Merkmal,

dass sie eine Zeitbeziehung enthalten. Wenn wir z. B. sagen: „Wenn der Satz X richtig ist, ist es der Satz Y auch,“ so meinen wir, dass die Zeit, in welcher der Satz X richtig ist, die Zeit ist, in welcher auch der Satz Y richtig ist; wenigstens reicht dies für unseren Zweck hin, wenn es auch den Sinn des Satzes nicht erschöpft.

Bezeichnet man nun mit X, Y, Z die einfachen Sätze, mit x, y, z die Zeiten, während welcher sie richtig sind, mit $+$, $-$, $=$ die Addition, Subtraction und Gleichheit dieser Zeiten, mit 0 das Nichts der Zeit, mit 1 die Gesamtheit der Zeit, so hat man offenbar

$$x + y = y + x$$
$$xy = yx$$
$$x(y + z) = xy + xz$$
$$x^2 = x$$
$$x(1 - x) = 0$$

formelle Gesetze, welche mit denen der Bezeichnung der primären Urteile identisch sind.

Interpretiren wir nun diese Zeichen. Da 1 die ganze Zeit und x den Teil dieser Zeit bedeutet, während welcher der Satz X richtig ist, so bezeichnet $1 - x$ den anderen Teil, während dessen der Satz X falsch ist; da xy die Zeit bedeutet, während welcher X und Y zusammen wahr sind, wird $x(1 - y)$ die Zeit ausdrücken, während welcher der Satz X wahr und der Satz Y falsch ist; $(1 - x)(1 - y)$ bezeichnet die Zeit, während welcher beide zugleich falsch sind, $x(1 - y) + y(1 - x)$ die Zeit, während welcher ausschliefslich X oder ausschliefslich Y wahr ist, $xy + (1 - x)(1 - y)$ die Zeit, während welcher X und Y entweder beide wahr oder beide falsch sind, und so fort.

Aber dies ist erst ein Element der Sätze. Wie sind die Sätze selbst auszudrücken? Man muss mehrere Fälle unterscheiden:

1) Es soll ausgedrückt werden der Satz: „das Urteil X ist richtig.“ — Da eine Zeitbeschränkung nicht ausgesprochen ist, ist gemeint, dass das Urteil X zu jeder Zeit

richtig ist; da aber x die Zeit der Geltung des Urteils X bezeichnet und diese Zeit die ganze Zeit ist, so wird

$$x = 1$$

der verlangte symbolische Ausdruck sein.

2) Es soll ausgedrückt werden der Satz: „das Urteil X ist falsch.“ — Auch hier ist die Zeit nicht beschränkt, die Zeit x, während welcher X richtig ist, ist also gleich 0,

$$x = 0.$$

3) Es soll ausgedrückt werden der disjunctive Satz: „Entweder das Urteil X oder das Urteil Y ist richtig“ und zwar in dem Sinn gegenseitiger Ausschliefsung. — Wir wissen, dass $x(1-y) + y(1-x)$ die Zeit bezeichnet, während welcher X oder Y richtig ist; somit ist

$$x(1-y) + y(1-x) = 1$$

der verlangte Ausdruck.

4) Es soll ausgedrückt werden der Bedingungssatz: „Wenn das Urteil Y richtig ist, ist es das Urteil X auch.“ Es bedarf nur des Ausdrucks dafür, dass die Zeit der Geltung von Y auch die Zeit der Geltung von X ist; dies heifst aber: es gibt einen unbestimmten Teil der ganzen Zeit, während dessen das Urteil Y richtig ist. Nun wird die Zeit, während welcher Y richtig ist, durch y bezeichnet, die Zeit der Geltung von X durch x; das Symbol einer unbestimmten Zeit sei v, so dass vx einen unbestimmten Teil der Zeit x bezeichnet. Wir haben dann

$$y = vx$$

5) Es soll ausgedrückt werden ein zugleich conditionaler und disjunctiver Satz. Drei Teile sind zu unterscheiden:

1) Wenn X oder Y richtig ist, ist Z richtig.
2) Wenn X richtig ist, ist Y oder Z richtig.
3) Wenn X oder Y richtig ist, sind Z und W zugleich richtig oder zugleich falsch.

Der symbolische Ausdruck dieser drei Fälle ist den dargelegten Principien zufolge:

1) $x(1-y) + y(1-x) = vz.$
2) $x = v\,\{y(1-z) + z(1-y)\}.$
3) $x(1-y) + y(1-x) = v\,\{zw + (1-z)(1-w)\}.$

Man ersieht aus dem Vorstehenden, dass die Combination der logischen Symbole, gleichviel ob sie primäre oder secundäre Urteile ausdrücken, immer denselben formellen Gesetzen unterliegt, und nur ein Unterschied der Interpretation zwischen den beiden Fällen besteht. Die Regeln der fundamentalen Entwicklungs- und Eliminationsmethoden sind mithin in beiden Fällen dieselben.

Prüfen wir nun die Methode an einem sehr verwickelten Beispiel.

Im zweiten Buch des Platonischen „States" findet sich folgender Beweis für die Unveränderlichkeit der Gottheit: „Sobald ein Wesen seine natürliche Form verändert, muss da nicht notwendigerweise diese Veränderung von ihm selber oder von etwas anderem kommen? — Ja. — Es wird aber das im besten Zustand Befindliche durch fremde Ursachen am wenigsten verändert; z. B. werden die gesündesten und kräftigsten Körper von Speisen und Anstrengungen am wenigsten angegriffen, und ebenso ist es mit den Pflanzen in Bezug auf die Winde, die Sonnenhitze und die Unbilden der Jahreszeiten. — So ist es in der Tat. — Ist aber nicht auch die Seele, je mutiger und weiser sie ist, desto weniger durch äufsere Unfälle zu erschüttern und zu verändern? — Ja. — Und aus demselben Grunde können auch von den Werken der menschlichen Hand, Gebäuden und Kleidungsstücken, die gut gearbeiteten und aus guten Stoffen hergestellten der Zeit und allen zerstörenden Einwirkungen am längsten widerstehen. — Ohne Zweifel. — Alles vermöge seiner Natur oder durch Kunst oder durch beides in einem schönen Zustande sich Befindende lässt also am wenigsten eine Veränderung durch etwas anderes zu. — So ist es. — Aber der Gott und das dem Gott Gehörige befindet sich doch im vollkommenen Zustande. — Ja. — Aus diesem Grunde würde er also doch gar nicht verschiedene Gestalten annehmen können. — Nein, — Sollte er sich aber wol selber verändern? — Offenbar müsste er das, wenn er verändert würde. — Würde er sich in diesem Falle zu etwas Besserem oder zu etwas Schlech-

terem umgestalten? — Notwendigerweise zu etwas Schlechterem, da wir doch nicht glauben können, dass es ihm irgend an Schönheit und Tugend gebricht. — Was du sagst, ist richtig, und da dem so ist, glaubst du wol, lieber Adeimantos, dass einer der Götter oder Menschen irgendwie freiwillig zu etwas Schlechterem sich mache? — Das ist unmöglich. — Also ist es auch für einen Gott unmöglich, dass er sich verändern will, vielmehr verharrt jeder von ihnen, da er von Natur der schönste und beste ist, allezeit in der ihm eigenen Gestalt."

Sondern wir nun die Prämissen dieser Argumentation aus. Es sind ihrer sechs:

1) Wenn Gott irgend eine Veränderung erfährt, so kommt diese Veränderung entweder von ihm selbst oder von einem anderen Wesen.

2) Wenn Gott vollkommen ist, wird er von einem anderen Wesen nicht verändert.

3) Gott ist vollkommen.

4) Wenn Gott von sich selbst verändert wird, wird er zum Schlechteren verändert,

5) Wenn Gott freiwillig handelt, wird er nicht zum Schlechteren verändert.

6) Gott handelt freiwillig.

Wir drücken die Elemente dieser Prämissen folgendermaſsen aus:

x bezeichnet den Satz: „Gott erfährt eine Veränderung."
y den Satz: „er wird von sich selbst verändert."
z den Satz: „er wird von einem anderen verändert."
s den Satz: „er ist vollkommen."
t den Satz: „er wird zum Schlechteren verändert."
w den Satz: „er handelt freiwillig."

Die symbolisch ausgedrückten Prämissen ergeben, nach Eliminirung der unbestimmten Symbole v, die folgenden Gleichungen:

$$xyz + x(1-y)(1-z) = 0, \qquad [1]$$

$$sz = 0, \qquad [2]$$

$$s = 1, \qquad [3]$$

$$y\,(1-t) = 0, \qquad [4]$$
$$wt = 0, \qquad [5]$$
$$w = 1. \qquad [6]$$

Wir eliminiren nun nacheinander z, s, y, t und w und interpretiren das jedesmalige Ergebnis.

Eliminiren wir z aus [1] und [2], so erhalten wir

$$xs\,(1-y) = 0. \qquad [7]$$

Eliminiren wir s aus [3] und [7]

$$x\,(1-y) = 0, \qquad [8]$$

Eliminiren wir y aus [4] und [8],

$$x\,(1-t) = 0, \qquad [9]$$

Eliminiren wir t aus [5] und [9],

$$xw = 0, \qquad [10]$$

Eliminiren wir w aus [6] und [10],

$$x = 0, \qquad [11]$$

Die Gleichungen von [8] an ergeben folgende Resultate:

Aus [8] erhalten wir:

$$x = \frac{0}{0}\,y$$

Wenn Gott eine Veränderung erfährt, wird er von sich selbst verändert.

Aus [9]:

$$x = \frac{0}{0}\,t$$

Wenn Gott eine Veränderung erfährt, wird er zum Schlechteren verändert.

Aus [10]:

$$x = \frac{0}{0}\,(1-w)$$

Wenn Gott eine Veränderung erfährt, handelt er nicht freiwillig.

Aus [11]:

$$x = 0$$

Gott erfährt keine Veränderung — Platos Schlusssatz.

---

# Kapitel VI.

## Stanley Jevons.

I. Kritik des Booleschen Systems. — II. Die logischen Symbole und ihre Gesetze. — III. Urteile. — IV. Allgemeine Formel des Schliefsens. — V. Directe Deduction. — VI. Indirecte Deduction. — VII. Das logische Abecedarium. — VIII, Die logische Maschine. — IX. Die Induction.

I. Stanley Jevons[1]) ist ein Schüler Booles, aber ein Schüler von selbständiger Eigenart. Von dem Lehrer

[1]) W. Stanley Jevons, früher Professor der Logik an Owen's College in Manchester, ist gegenwärtig Professor der Nationalökonomie am University College in London. Seine logischen Schriften sind die folgenden: *Pure Logic, or the logic of quality apart from quantity, with remarks on Boole's system and on the relation of logic and mathematics*, London 1864, 1 Bd. — *The substitution of similars the true principle of reasoning, derived from a modification of Aristotle's dictum*, London 1869. 1 Bd. — *On a general system of numerically definite reasoning.* Bd. 4 der dritten Folge der Denkschriften der literarischen und philosophischen Gesellschaft zu Manchester, 1870. — *Elementary Lessons on Logic deductive und inductive, with copious questions and examples, and a vocabulary of logical terms* London 1870 1 Bd. — *On the mechanical Performance of Logical inference* in den *Philosophical Trunsactions* der königlichen Gesellschaft 1870. Bd. 160 S. 497, — *On the inverse, or inductive logical problem*, im 5. Bd. der dritten Folge der Denkschriften der literarischen und philosophischen Gesellschaft zu Manchester. 1872. — *The Principles of science: a treatise on logic and scientific method. London* 1874, 2 Bde. ein bedeutendes Werk, in welchem der Verfasser sich, wie seine Landsleute zugeben, als den oft glücklichen Rivalen der gröfsten Methodologen Englands, Whewells, Herschels und Stuart Mills zeigt. — Endlich *Logic*, ein kleines, unter den „*Science primers*“ (1876 London, Macmillan) erschienenes Handbuch. Stanley Jevons' Elementarbücher sind nicht nur in den englischen, sondern auch in den amerikanischen Schulen eingeführt.

übernimmt er das Princip, aber nicht die Methode. Boole hat zuerst das logische Problem in seiner ganzen Allgemeinheit hingestellt: wenn gewisse Prämissen oder logische Bedingungen gegeben sind, soll eine beliebige Klasse von Dingen unter diesen Bedingungen bestimmt werden. Wenn aber Boole durch eine geniale Anschauung, welche der des Descartes, als er die Anwendbarkeit der Geometrie auf die allgemeine Lösung algebraischer Gleichungen fand, vergleichbar ist, Macht und Grenzen der Logik erweitert hat, so hat er doch mehr nur die Möglichkeit der Lösung des Problems gezeigt, als selber schon eine klare und endgültige Lösung gegeben. Es ist der geringste Mangel seines Systems, dass er die einfachen Verfahrungsweisen des deductiven Denkens unter geheimnisvollen algebraischen Operationen verhüllt, dass er dunkle, bisweilen geradezu unverständliche Symbole[1]) gebraucht und so aus der Logik, die eine Sache jedermanns ist, eine Sache weniger in die Mathematik Eingeweihter macht. Befindet dieses System sich wenigstens mit den Gesetzen des Denkens in Übereinstimmung? — Stanley Jevons findet zwei fundamentale Fehler daran auszusetzen, welche hervorgehoben werden müssen, will man die Originalität seines eigenen Systems verstehen, ohne dessen Abstammung von dem Booles zu verkennen.

Erstlich sind Booles Symbole von den Bezeichnungen oder Symbolen der gewöhnlichen Sprache durchaus verschieden, und somit ist seine Logik nicht die des gewöhnlichen Denkens. Beim Sprechen gebrauchen wir häufig zur Verbindung verschiedener Begriffe die Wörter *und* und *oder*, wir meinen damit aber nicht, dass die so verbundenen Begriffe logische Gegensätze sind, welche nicht ohne Widerspruch von demselben ausgesagt werden können. Wir sagen zum Beispiel: Ein Pair ist entweder Herzog oder Graf oder Baron u. s. w., ohne dass dieser Satz notwendig besagte,

[1]) Ähnliche Einwände sind gegen Booles System neuerdings erhoben worden von Ernst Schröder *Der Operationskreis des Logikkalküls* Leipzig 1877.

dass ein Pair nur den einen oder den andern dieser Titel haben könne; so ist der Prinz von Wales zugleich Herzog von Cornwall, Graf von Chester, Baron Renfrew u. s. w. Die logische Conjunction und Disjunction bezeichnen nicht wesentlich sich ausschliefsende Alternativen, wie wir denn, wenn wir den Sprachgebrauch der klassischen Schriftsteller sorgfältig prüfen, finden werden, dass der Sinn der durch die Wörter *und* und *oder* verknüpften Begriffe veränderlich ist von absoluter Identität bis zu absolutem Gegensatz. Es ist daher eine Frage des Inhaltes und nicht der Form, ob zwei verschiedene Begriffe einander ausschliefsen oder nicht.

Boole versteht es anders. Für ihn sind die durch das Zeichen = verbundenen Begriffe logische Gegensätze, vollkommen von einander verschiedene Klassen, dergestalt dass kein Glied der einen gleichzeitig in der anderen vorkommen kann. Er kommt auf diesem Wege zu handgreiflichen Absurditäten.

Nehmen wir einen Satz:

$$x = y + z$$

und es sei $x =$ Caesar

$y =$ Eroberer Galliens

$z =$ erster römischer Kaiser.

Es ist nicht absurd zu sagen: Caesar ist der Eroberer Galliens und der erste römische Kaiser; in der logischen Beschaffenheit der durch das Zeichen + verbundenen Begriffe liegt nichts, was eine Entscheidung darüber zuliefse, ob der Eroberer Galliens und der erste römische Kaiser eine und dieselbe Person sind. Nehmen wir jetzt die Folgerung

$$x - z = y$$

welche man, Booles System zufolge, erhält, indem man z von beiden Gliedern der Gleichung $x = y + z$ abzieht, so kommen wir zu dem seltsamen Schlusssatz: Caesar ist der Eroberer Galliens, wofern er nicht der erste römische Kaiser ist.[1])

---

[1]) *Pure Logic.* Kap. XV (177 bis 183).

Diese irrigen Ansichten von dem Wesen der logischen Alternative sind die Folge eines tiefer liegenden Irrtums hinsichtlich des Verhältnisses der Zal zu den logischen Begriffen. Wir sahen im vorangehenden Kapitel, wie Boole nach Aufstellung seiner Symbole und der sie regierenden Gesetze dazu gelangt, das logische Rechnen anzusehen als ein algebraisches Rechnen, in welchem die Unbekannten ausschliefslich den Wert 1 und 0 haben können. Das heifst aber die reine Logik an eine Bedingung fesseln, welche sie in ein rein numerisches System verwandelt, dessen Schlüsse erst vermöge einer anderweitigen, übereinkunftsmäfsigen Interpretation einen logischen Sinn haben. Ein solches Verfahren würde nur dann berechtigt sein, wenn die Zal jedem logischen Begriff und jeder logischen Bedingung voranginge und übergeordnet wäre; alsdann würde das qualitative Schliefsen der alten Logiker lediglich ein besonderer Fall des Calcüls, und Logik im eigentlichen Sinne der Algebra in Wahrheit tributpflichtig sein. Tatsächlich aber und von Rechts wegen ist vielmehr die Zal durch gewisse logische Bedingungen bestimmt. Um dies zu beweisen, müssen wir den Zalbegriff analysiren.

Zal ist synonym mit Verschiedenheit; Identität ist Einheit; Verschiedenheit allein erzeugt Mehrheit. Jeder abstracte Begriff besitzt eine gewisse Einheit: die *Gerechtigkeit* z. B. ist dieselbe in allen gerechten Handlungen, die sie offenbaren; in ihr ist nichts, wodurch wir Gerechtigkeit von Gerechtigkeit unterscheiden können. Während aber die Gerechtigkeit überall und immer sich selber gleich und mithin eine ist, können *gerechte Handlungen* von einander unterschieden und deshalb gezält werden. Insofern sie gerecht sind, sind sie identisch; sie unterscheiden sich aber von einander durch allerlei Umstände der Zeit, des Ortes u. s. w. Mehrheit also entsteht aus Verschiedenheit.

Es ist daher falsch zu sagen, wie oft geschehen ist, die Einheiten seien Einheiten, insofern sie vollkommen ähnlich seien; drei ganz identische Dinge würden zu einem einzigen zusammenfliefsen. Das Richtige ist vielmehr, dass

die Einheiten Einheiten sind, insofern sie logisch conträr sind. Drei oder mehr Dinge können sehr gut irgend welche Eigenschaften gemeinsam haben, welche es gestatten, sie zu einer Klasse zu vereinigen; sollen sie aber gezält werden können, so müssen sie von einander unterscheidbar sein, und es muss irgend ein Umstand da sein, der es ermöglicht, sie auseinander zu halten. Das die Unterscheidung Begründende ist bald der Raum bald die Zeit bald die bloſse Qualität. So sind drei Goldstücke, wie ähnlich man sie sich auch vorstellen mag, *drei*, weil sie verschiedene Plätze im Raume einnehmen; vier Pendelschwingungen von gleicher Dauer und gleicher Amplitüde sind *vier*, weil sie auf einander folgen. Ebenso können wir ferner sagen, dass Gewicht, Härte, Farbe eines Goldstückes *drei* Eigenschaften sind, weil unsere Sinne sie nicht zusammenwerfen. Kurz, jede Verschiedenheit ist eine Quelle der Mehrheit, und man darf darum die abstracte Zal als *die leere Form der Verschiedenheit* definiren.[1])

Die Logik ist daher der Wissenschaft der Zal nicht subordinirt, vielmehr ist sie es, welche umgekehrt die Bedingungen der Zal bestimmt. Also ist die Algebra nicht der Logik vorangehend und übergeordnet, sie ist vielmehr nur eine entwickelte Logik. Mithin darf die Behandlung der logischen Symbole nicht rein algebraischen Bedingungen unterworfen werden, und man muss, indem man übrigens die Fassung des Problemes, wie Boole es hingestellt hat, beibehält, um es lösen zu können, die von ihm angenommene Rangordnung zwischen Algebra und reiner Logik umkehren. Auf diese Weise beseitigt man den mathematischen Apparat seines Systems, die dunkeln und geheimnisvollen Symbole, endlich die logisch unverständlichen Operationen, und befreit von jeder fremdartigen Superfötation wird die Logik in aller ihrer Einfachheit und Allgemeinheit erscheinen.

---

[1]) *Pure Logic* Kap. XV 184 bis 192; *Princ. of Science* Buch II. Kap. 8.

II. Das formale Schlussverfahren ist entweder deductiv oder inductiv. Deduciren und induciren sind inverse Operationen. — Jedes Schlussverfahren setzt Urteile, jedes Urteil Begriffe voraus. Die Begriffe sind entweder positiv oder negativ; positiv, wenn sie den Besitz der Eigenschaft, die sie bedeuten, mitbezeichnen, negativ, wenn sie die Abwesenheit dieser selben Eigenschaft mitbezeichnen, z. B. Mensch, nicht-Mensch; weiſs, nicht-weiſs; groſs, nicht-groſs.

Symbolisch werden die Begriffe durch die Buchstaben des Alphabetes bezeichnet, und zwar die positiven durch die Majuskeln, die entsprechenden negativen durch die entsprechenden Cursiv-Minuskeln. Wenn z. B. A bezeichnet *Mensch*, wird *a nicht-Mensch* bezeichnen.

Häufig ist ein Begriff aus mehreren einfachen Begriffen zusammengesetzt. Der symbolische Ausdruck dafür wird die Nebeneinanderstellung der besonderen Symbole eines jeden Teilbegriffes sein. Nehmen wir z. B. den Satz: Gold ist ein gelbes Metall, ein guter Wärme- und Electricitätsleiter, von einer Dichtigkeit gleich 20,688; wenn A bezeichnet Metall, B gelb, C guter Wärme- und Electricitätsleiter, D von einer Dichtigkeit gleich 20,688, so wird der vollständige Ausdruck des Prädicates ABCD sein, und die complexe Klasse ABCD alle Dinge umfassen, welche zu gleicher Zeit die durch A, durch B, durch C und durch D mitbezeichneten Attribute besitzen. Soll eine Klasse von Dingen ausgedrückt werden, welche gleichzeitig alle diese Attribute auſser einem, z. B. D, besitzen, so lautet die Bezeichnung ABC*d*

Nunmehr können wir die Gesetze dieser Symbole feststellen. Sie haben, wie Boole erkannt hat, die Eigenschaft, *commutativ* zu sein. Sieht man ab von den grammatischen und literarischen Besonderheiten, welche in der Sprache die Reihenfolge der Substantive, Adjective u. s. w. regeln, und achtet man lediglich auf die logische Bedeutung der Begriffe, so bemerkt man leicht, dass die Art der Verteilung dieser Begriffe und der sie vertretenden Zeichen von gar

keiner Bedeutung ist. Ob ich sage ABC oder BCA oder ACB oder CAB oder CBA, das Ergebnis ist allemal dasselbe; in jedem dieser Fälle bezeichne ich die Dinge, welche gleichzeitig die durch C, durch B und durch C mitbezeichneten Eigenschaften besitzen. Dieses Gesetz ist den logischen und den algebraischen gemeinsam.

Ein anderes, den logischen Symbolen eigentümliches Gesetz, welches Boole erkannt und mit dem ungeeigneten Namen: *Gesetz der Dualität* bezeichnet hat, ist dasjenige, wonach die Wiederholung desselben Begriffes unwirksam ist. Ob man sagt: ein rundes Ding oder ein rundes, rundes Ding u. s. f., es ist immer genau dasselbe. Symbolisch also ist

$$A = AA = AAA \text{ etc.}$$
$$a = aa = aaa \text{ etc.}$$

Jevons nennt dieses Gesetz das *Gesetz der Einfachheit.*[1])

III. Wir gehen weiter. Die Urteile drücken, fasst man ihren Inhalt ins Auge, mannigfache Beziehungen der Zeit, des Ortes, der Art und Weise, der Qualität, der Quantität, des Grades, der Causalität u. s. w. aus; beachtet man dagegen ihre Form, das Einzige, womit es die Logik zu tun hat, so drücken sie sämtlich Identität des Subjectes und des Prädicates aus. Jevons quantificirt demnach das Prädicat, wie Hamilton und Boole, und er ist in der symbolischen Darstellung des Urteils mit der Bezeichnung durch die Copula = einverstanden. Er unterscheidet jedoch drei Arten der logischen Identität; die einfache Identität, die partielle Identität und die limitirte Identität.

Die einfachen Identitäten, von der Form $A = B$,

---

1) *Pure Logic* S. 15. *Princip. of Science* B. I. Kap. 2. Das Gesetz der Dualität $x^2 = x$ ist, wie wir im vorangehenden Kapitel gesehen haben, der Schlüssel zu Booles ganzem logico-algebraischen Calcül. Jevons ist weit davon entfernt, von seinem Gesetz der Einfachheit denselben Gebrauch zu machen; er merkt es lediglich an, um das Verhältnis der Logik zur Mathematik zu bezeichnen.

sind von der alten Logik völlig aufser Acht gelassen worden, und doch sind sie zalreich und werden in mancherlei Schlüssen verwendet. Solcher Art sind die folgenden Urteile: Jupiter ist der gröfste der Planeten; die Königin von England ist Kaiserin von Indien; das gleichseitige Dreieck ist das gleichwinklige Dreieck; Kochsalz ist Chlornatrium; ferner alle Definitionen. In jedem dieser Sätze bezeichnen Subject und Prädicat genau dieselben Individuen, und es ist richtig und natürlich, sie symbolisch durch die Copula = zu verknüpfen.

Die partiellen Identitäten, von der Form $A = AB$, sind diejenigen, welche die peripatetische Logik auffasste als Enthaltensein einer Klasse in einer anderen, umfassenderen aussagend, z. B. die Säugetiere sind Wirbeltiere. Hier bezeichnen Subject und Prädicat, getrennt von einander und einzeln betrachtet, keineswegs die selben Einzeldinge, die Klasse Wirbeltiere hat, um die hergebrachte Ausdrucksweise zu gebrauchen, einen gröfseren Umfang als die Klasse Säugetiere. Andrerseits aber liegt es auf der Hand, dass das Verhältnis der Einschliefsung auf dem Identitätsverhältnis beruht; die Säugetiere können in den Wirbeltieren nicht enthalten sein, wenn sie nicht mit einem Teile der letzteren identisch sind. Also die Säugetiere = diejenigen Wirbeltiere, welche Säugetiere sind. Eines besonderen Symbols der Particularität, wie Boole es hat, bedarf es zur Darstellung dieser Art von Urteilen nicht; mehr empfiehlt es sich, für das Prädicat einen zusammengesetzten Ausdruck zu bilden, der dessen ganze Bedeutung bezeichnet. Wenn $A$ = Säugetiere und $B$ = Wirbeltiere, so lässt sich das Urteil: die Säugetiere sind Wirbeltiere durch die Gleichung $A = AB$ ausdrücken. Das Prädicat $AB$ bezeichnet genau dieselben Einzeldinge wie das Subject $A$, nämlich diejenigen, welche zu gleicher Zeit die Eigenschaften $A$ und $B$ besitzen, d. h. in dem vorliegenden Fall die Wirbeltiere, welche Säugetiere sind.

Die limitirten Identitäten, von der Form $AB = AC$, bilden eine dritte Klasse von Urteilen, welche beinahe

ebenso wichtig ist als die beiden anderen. Gewisse Dinge können nur in gewissen Grenzen und unter gewissen Bedingungen identisch sein. Sagen wir z. B. Gold ist hämmerbar, so meinen wir, dass es dies nur im festen Zustande ist. Wenn also

A = fester Zustand
B = Gold
C = hämmerbar,

so ist B = C nur innerhalb der Grenzen von A, was wir ausdrücken werden durch die Gleichung

$$AB = AC.$$

Was die negativen Urteile anlangt, so ist es, da sie ja von einem gegebenen Subject die Abwesenheit einer oder mehrerer der durch das Prädicat bezeichneten Eigenschaften behaupten, leicht, sie unter Beibehaltung der Copula = mit Hülfe der negativen Begriffe auszudrücken. Nehmen wir das Urteil; Eisen ist nicht flüssig. Wenn

A = Eisen
B = flüssig,

so wird der symbolische Ausdruck des Urteils sein

$$A = Ab.$$

Es können unter den zu Schlüssen verbundenen Urteilen einfache, partielle und limitirte Identitäten von negativen Begriffen vorkommen:

$$a = b$$
$$a = ab$$
$$ab = bc$$

IV. Jedes Urteil ist daher im Grunde eine Gleichung. Daraus folgt, dass das Schlussverfahren d. h. der Fortgang von bekannten Verhältnissen zu unbekannten nichts anderes ist als die Ersetzung des Identischen durch das Identische, des Gleichwertigen durch das Gleichwertige, des Ähnlichen durch das Ähnliche in einem Urteile oder einem System von Urteilen. Das Mittel der alten Analytik war die Ein- und Ausschliefsung der Begriffe, das der allgemeinen Logik, welche „alle engen Beschränkungen des aristotelischen Sy-

stems beseitigt“ heifst Substitution, denn „in jeder Relation steht ein Ding zu einem anderen Dinge in demselben Verhältnis, in welchem es zu einem mit diesem identischen, ähnlichen oder gleichwertigen steht“ oder anders ausgedrückt, „wir können in einem Ganzen, ohne es zu verändern, einen Teil durch sein Äquivalent ersetzen.“

Das einzige allgemeine Schlussprinzip lautet daher, dass, was von einem Dinge oder Umstand gilt, von jedem mit diesem identischen oder gleichwertigen Ding oder Umstand ebenfalls gilt, und das einzige Mittel des Schliefsens ist *die Substitution des Ähnlichen.*[1])

V. Betrachten wir jetzt die Anwendung des Substitutionsverfahrens. Alle seine Operationen setzen die folgenden drei Denkgesetze voraus: 1) das Gesetz der Identität: was ist, ist; 2) das Gesetz des Widerspruchs: es kann etwas nicht zugleich sein und nicht sein; 3) das Gesetz der Dualität (Gesetz des ausgeschlossenen Dritten): etwas muss sein oder nicht sein.

Alles Schliefsen ist entweder deductiv oder inductiv; Deduction und Induction sind inverse Processe, doch ist formell die letztere der erstgenannten untergeordnet.[2]) Es ist unmöglich, die Gesetze, welche irgend welchen Erscheinungen zu Grunde liegen, zu bestimmen, wenn wir nicht zuvor die Fähigkeit haben zu bestimmen, welche Resultate aus einem gewissen Gesetze folgen. Ebenso wie die Division die Kenntnis der Multiplication voraussetzt, oder wie die Integralrechnung auf den Ergebnissen der Differentialrechnung beruht, ebenso erfordert die Induction die vorhergehende Kenntnis der Deduction.[3]) Wir betrachten daher zuerst das deductive Schlussverfahren und wir unterscheiden in diesem die directe von der indirecten Deduction.

---

[1]) *The subst. of simil.*

[2]) *Princ. of science* B. I Kap. 4.

[3]) *Princ. of science* B. I Kap. 6; *On the mechanical performance of logical inference.*

Der einfachste Fall der Substitution des Ähnlichen in der directen Deduction ist die unmittelbare Folgerung, welche in der Hinzufügung einer qualificirenden Bestimmung zu den beiden Seiten einer Gleichung besteht.

So wird aus der einfachen Identität A = B geschlossen

$$AC = BC$$

$$8 = 5 + 3$$

$$8 + 2 = (5 + 3) + 2.$$

Pflanzen = Kohlensäure zerlegende Körper; also mikroskopische Pflanzen = Kohlensäure zerlegende mikroskopische Körper,

Ebenso ergibt sich aus der partiellen Identität A = AB

$$AC = ABC$$

Mittelbare Schlüsse — *Erster Fall:* Folgerung aus zwei einfachen Identitäten:

$$A = B$$

$$B = C;$$

setzen wir in der Gleichung A = B für B das ihm gleiche C ein, so haben wir

$$A = C$$

Die Hauptstadt von England = London,
London = die volkreichste Stadt der Erde,
Also ist die Hauptstadt von England = die volkreichste Stadt der Erde.

*Zweiter Fall:* Folgerung aus einer einfachen und einer partiellen Identität

$$A = B$$

$$B = BC;$$

setzen wir in der ersten Gleichung für B sein Äquivalent BC ein, so erhalten wir:

$$A = BC.$$

Der höchste Berg Europas ist der Montblanc,
Der Montblanc = ein schneebedeckter Berg,
also der höchste Berg Europas = ein schneebedeckter Berg.

*Dritter Fall:* Folgerung einer partiellen aus zwei par-

tiellen Identitäten, der Typus der ersten syllogistischen Figur der alten Logik:

$$A = AB$$
$$B = BC;$$

setzen wir in der ersten Gleichung für 3 sein Äquivalent BC ein, so erhalten:

$$A = ABC.$$

Natrium = Natrium-Metall
Metalle = elektricitätsleitende Mtalle;
also Natrium = electricitätsleitendes Ietall.

*Vierter Fall:* Folgerung einer eifachen aus zwei partiellen Identitäten:

$$A = AB$$
$$B = AB;$$

durch Substitution von B für AB inder ersten Gleichung erhalten wir

$$A = B.$$

Gleichseitiges Dreieck = gleichwikliges gleichseitiges Dreieck, Gleichwinkliges Dreiec = gleichseitiges gleichwinkliges Dreieck, also gleiseitiges Dreieck = gleichwinkliges Dreieck.

*Fünfter Fall:* Folgerung einer liitirten Identität aus zwei partiellen:

$$B = AB$$
$$B = CB;$$

setzen wir in der zweiten Gleichungir B sein Äquivalent AB ein, so erhalten wir

$$AB = CB.$$

Kalium = Kalium-Metall,
Kalium = auf dem Wasser scimmendes Kalium;
also Kalium-Metall = auf dem War schwimmendes Kalium-Metall.

„Es ist dies", sagt Jevons „iider Tat ein Syllogismus der dritten Figur nach de Modus *darapti*, mit dem Unterschiede jedoch, dass uns Schlusssatz viel genauer ist als der des alten Syllogisas. Aristoteles würde aus den Prämissen: Kalium ist Metall und Kalium

schwimmt auf dem Wasser, geschlossen haben, dass einige Metalle auf dem Wasser schwimmen. Fragt man aber, welches diese einigen Metalle sind, so wird die Antwort sicherlich sein: das Metall, welches Kalium genannt wird."

VI. Alle bisherigen Schlüsse haben die Anwendung des ersten Denkgesetzes auf die verschiedenen Glieder der Gleichungen zur Grundlage. Dabei bleibt jedoch die Deduction nicht stehen. Bilden wir disjunctive Urteile und wenden wir darauf das Gesetz des Widerspruches und das der Dualität an, so können wir zu Conclusionen gelangen, welche über den Bereich der peripatetischen Logik erheblich hinausgehen. Hier wird nächst der Ergiebigkeit des Substitutionsverfahrens die dadurch ermöglichte ungemeine Vereinfachung des Booleschen Systems zu Tage treten.

Wir kennen Booles Fassung des allgemeinen Problems der Logik, wir kennen auch den verwickelten mathematischen Apparat, den er zu dessen Lösung in Bewegung setzt. Es gilt nun, mit Hülfe des Substitutionsprincipes und unter der Gewärleistung der Denkgesetze eine diesen Gesetzen entsprechendere, einfachere, klarere und nicht minder allgemeine Lösung des Problems zu geben.

Bestimmen wir zunächst das Wesen und die Gesetze des alternativen Verhältnisses. Boole hält mit Hamilton eine jede Alternative für logisch exclusiv, er nimmt also an, dass keins von den durch eines ihrer Glieder bezeichneten Dingen gleichzeitig von dem anderen bezeichnet werden kann. Andere haben dagegen behauptet, dass Alternativen häufig „compossibel" seien, d. h. dass ihre verschiedenen Glieder gleichzeitig von denselben Dingen ausgesagt werden können. Whately führt folgendes Beispiel dafür an: „Die Tugend verschafft uns entweder die Achtung unseres Nächsten oder die Gunst Gottes" und er bemerkt dazu: „Hier sind beide Glieder richtig, und wir dürfen daher, wenn wir das eine bejahen, das andere darum nicht verneinen." Whately hat recht. Es gibt compossible Alternativen ebenso wie es exclusive gibt. Hier liegt Booles

Hauptirrtum; er hat ihn dazu geführt, die Logik der Algebra unterzuordnen und in den Methoden des numerischen Calcüls die Mittel zur Lösung des allgemeinen Problems der Logik zu suchen. Es ist die Grundbedingung der Zal, dass jede Einheit von jeder anderen Einheit absolut verschieden sein muss; aber das ist nicht die wesentliche Bedingung der logischen Begriffe. Man muss sich daher hüten, zum Behuf der Lösung des allgemeinen Problems der Deduction die der Wissenschaft der Zalen eigentümlichen Bedingungen in die Logik hineinzutragen.

Erinnern wir uns daran, dass der Denkgesetze drei sind: das Gesetz der Identität — ein Ding ist sich selber gleich; — das Gesetz des Widerspruches — ein Ding kann nicht zur selben Zeit und am selben Orte contradictorische Attribute haben; — das Gesetz der Dualität — jedes Ding muss ein gegebenes Attribut entweder besitzen oder nicht besitzen. Die Verbindung dieser drei Gesetze setzt uns in den Stand, sämtliche Ergebnisse einer Aussage abzuleiten d. h. irgend eine Klasse von Dingen unter den in dieser Aussage enthaltenen Bedingungen zu bestimmen. Das Gesetz der Dualität entwickelt sämtliche Klassen, welche die möglichen Combinationen dieser Bedingungen constituiren können; das Gesetz der Identität befähigt uns, einem Begriffe das ihm nach den Prämissen Gleiche zu substituiren; endlich das Gesetz des Widerspruches lässt uns alle den gegebenen Bedingungen widersprechenden Klassen oder Alternativen entfernen.

Nehmen wir ganz einfache Beispiele. Es sei die Prämisse: Ein Metall ist ein Element, und die Aufgabe, auf Grund dieser Aussage die Klasse der zusammengesetzten oder nicht elementaren Körper zu bestimmen.

Mit Hülfe des Dualitätsgesetzes entwickle ich die Klasse Nichtelement in zwei Alternativen: Was nicht Element ist, ist entweder Metall oder Nichtmetall. Nach der Prämisse ist aber ein Metall ein Element; setze ich demgemäſs in der ersten Alternative für Metall sein Äquivalent Element, so bekomme ich den Satz: ein Nicht-Element ist

ein Element. Das Gesetz des Widerspruchs zwingt mich, diese Alternative auszuschliefsen, und übrig bleibt nur die andere: Ein Nicht-Element ist ein Nicht-Metall. Dies ist das verlangte Resultat.

Nehmen wir jetzt zwei Prämissen:

Eisen ist ein Metall. [1]
Ein Metall ist ein Element [2]

Durch Anwendung des Dualitätsgesetzes auf die combinirten Begriffe dieser Prämissen gewinnen wir die folgenden Combinationen:

Eisen ist ein Metall-Element [$\alpha$]
oder ein Metall-Nichtelement [$\beta$]
oder ein Nichtmetall-Element [$\gamma$]
oder ein Nichtmetall-Nichtelement [$\delta$]

Die Prämisse [1] schliefst aber die Combination [$\gamma$] und [$\delta$] aus, diejenigen, welche den Begriff Nichtmetall enthalten; die Prämisse [2] schliefst die Combination [$\beta$] aus, welche den Begriff Nichtelement enthält. Somit ist nur die Combination [$\alpha$] gültig, und diese enthält die vollständige Darstellung der Klasse Eisen unter den in den Prämissen gegebenen Bedingungen.

Um die Fruchtbarkeit des Verfahrens zu zeigen, wollen wir Prämissen und Combinationen symbolisch ausdrücken und für die Disjunction das Zeichen $\cdot|\cdot$ wälen:

Prämissen $A = B$ [1]
$B = C$ [2]

Verlangt wird die vollständige Darstellung von A; die zu betrachtenden Alternativen müssen daher A enthalten:

$$ABC$$
$$ABc$$
$$AbC$$
$$Abc$$

$$A = ABC \cdot|\cdot ABc \cdot|\cdot AbC \cdot|\cdot Abc$$

Die Glieder $AbC$ und $Abc$ stehen mit der Prämisse [1] in Widerspruch und fallen daher fort; beide enthalten $b$, welches mit B und daher nach der ersten Prämisse mit A contradictorisch ist; ebenso ist auf Grund der zweiten

Prämisse das Glied AB$c$ zu entfernen, denn es enthält $c$, welches mit C contradictorisch ist, C aber ist identisch mit B wie dieses mit A. Somit ist ABC die vollständige Darstellung von A unter den Bedingungen [1] und [2].

Auf dieselbe Weise können wir $c$ (Nichtelement) unter den gleichen Bedingungen darstellen. Nach dem Dualitätsgesetz lässt es sich in folgende Alternativen entwickeln:

$$\begin{matrix} ABc \\ Abc \\ aBc \\ abc \end{matrix}$$

$$c = ABc \cdot|\cdot Abc \cdot|\cdot aBc \cdot|\cdot abc.$$

Aber AB$c$ und A$bc$ stehn im Widerspruch mit der Prämisse B = C; $a$B$c$ steht im Widerspruch mit der Prämisse A = B; also ist $abc$ die Darstellung der Klasse $c$.

Auf gleiche Art würde man jede andre Klasse, B, C, $a$, $b$ unter den selben Bedingungen darstellen können; und auch wenn die Zal der gegebenen Bedingungen und in Folge dessen die der möglichen Alternativen wächst, immer wird die Lösungsmethode dieselbe sein und sich in jedem einzelnen Fall auf Operationen des Classificirens, der Auslese und Ausscheidung des Widersprechenden zurückführen lassen. Entwicklung, mittels des Dualitätsgesetzes, aller für den zu bestimmenden Begriff in Bezug auf die in den Prämissen enthaltenen Begriffe möglichen Alternativen, Ausscheidung der Alternativen, welche contradictorische Begriffe enthalten, und Gleichsetzung aller übrig bleibenden Begriffe mit dem zu bestimmenden: das ist das ganze Verfahren des indirecten deductiven Schliefsens, ein Verfahren von einer weit gröfseren Ergiebigkeit, als die beschränkten Methoden der peripatetischen Logik ahnen lassen konnten.

Es seien, um ein ganz einfaches Beispiel zu wälen, die beiden Begriffe A und B und die Prämissen

$$A = AB \qquad [1]$$

$$B = BC \qquad [2]$$

Man fragt, was A ist.

Nach dem Gesetz der Dualität haben wir

$$A = AB \cdot|\cdot Ab \qquad [3]$$

$$A = AC \cdot|\cdot Ac \qquad [4]$$

Setzen wir für A auf der rechten Seite der dritten Gleichung das ihm nach der vierten gleiche $AC \cdot|\cdot Ac$ ein, so erhalten wir die der Entwicklung der Booleschen Functionen analoge, aber viel natürlichere und einfachere Entwickelung von A:

$$A = ABC \cdot|\cdot ABc \cdot|\cdot AbC \cdot|\cdot Abc \qquad [5]$$

Setzen wir nun ferner für A und B auf der rechten Seite der Gleichung [5] deren von [1] und [2] gebotene Äquivalente ein, so haben wir

$$A = ABC \cdot|\cdot ABCc \cdot|\cdot AbC \cdot|\cdot ABbe$$

Da aber $Bb$ und $Cc$ contradictorisch sind, ist

$$ABCc = 0$$

$$BBbC = 0$$

$$ABbc = 0$$

Also

$$A = ABC.$$

Allgemein ausgedrückt fordert demnach die Lösung eines logischen Problems zunächst die Bildung sämtlicher möglichen Combinationen der dabei in Betracht kommenden Begriffe. Hat man zwei Begriffe, so ergeben sich folgende vier Combinationen:

$$AB \ [\alpha]$$

$$Ab \ [\beta]$$

$$aB \ [\gamma]$$

$$ab \ [\delta]$$

[$\alpha$] und [$\beta$] sind die Entwicklung von A, [$\gamma$] und [$\delta$] die von $a$, [$\alpha$] und [$\gamma$] die von B, [$\gamma$] und [$\delta$] die von $b$.

Angenommen nun, die Prämisse sei $A = B$, so ergibt die Substitution, dass von diesen vier Combinationen zwei, nämlich $Ab$ und $aB$, contradictorisch sind, und somit nur zwei festgehalten werden dürfen, $AB$ und $ab$. Hieraus folgt:

$$A = AB$$

$$B = AB$$

$$a = ab$$

$$b = ab$$

Enthält die Frage eine gröſsere Zal von Begriffen, so bleibt doch die Methode immer dieselbe. So ergeben die

drei Begriffe ABC nach dem Dualitätsgesetz die folgenden acht Combinationen:

ABC [α]
ABc [β]
AbC [γ]
Abc [δ]
aBC [ε]
aBc [ζ]
abC [η]
abc [ϑ]

Die vier ersten geben die Entwicklung von A; [α] [β] [ε] [ζ] die von B; [α] [γ] [ε] [η] die von C; [γ] [δ] [η] [ϑ] die von *b*; u. s. w.

Fragt man nun z. B. nach der vollen Bedeutung der Prämissen

A = AB [1]
B = BC [2]

so vergleichen wir die acht Combinationen von A, B, C und *a*, *b*, *c* mit diesen Prämissen; γ und δ stehn im Widerspruch mit der ersten, β und ζ mit der zweiten Prämisse, und es bleiben somit übrig die Combinationen

ABC
aBC
abC
abc

woraus folgt, dass

$$A = ABC$$
$$c = abc$$
$$B = ABC \cdot\!|\!\cdot aBC$$
$$b = abC \cdot\!|\!\cdot abc$$ [1])

Enthalten die Prämissen 4, 5, 6 verschiedene Begriffe, so werden wir 16, 32, 64 Combinationen haben, und so fort. Die Reihen dieser Combinationen bilden das, was Jevons das logische Abecedarium[2]) nennt.

[1]) *Princ. of Science* B. I Kap. 6. *On the mechanical performance of logical inference.*

[2]) *Princ. of science* B. I Kap. 6.

VII. Hier folgt das Abecedarium für 1, 2, 3, 4 und 5 Begriffe. X möge *summum genus* d, h. die absolut universelle Klasse bezeichnen, welche alle Dinge ohne Ausnahme umfasst. Die Klasse A und ihr Gegenteil *a* bilden heifst nichts anderes als unter allen Dingen diejenigen wälen, welche die durch A mitbezeichneten Attribute besitzen und die welche sie nicht besitzen. Jede Klasse von geringerem Umfange als das *summum genus* lässt sich daher darstellen durch XA oder XAB oder XABC u. s. w. An der Spitze des Abecedariums steht daher füglich X, und man hat sich vorzustellen, dass alle minder umfangreichen Klassen gleichsam einen Ausschnitt aus X bilden. Also:

| I | II | III | IV | V | VI |
|---|---|---|---|---|---|
| X | AX | AB | ABC | ABCD | AB*c*DE |
| | *a*X | A*b* | AB*c* | ABC*d* | ABCD*e* |
| | | *a*B | A*b*C | AB*c*D | ABC*d*E |
| | | *ab* | A*bc* | AB*cd* | ABC*de* |
| | | | *a*BC | A*b*CD | AB*c*DE |
| | | | *a*B*c* | A*b*C*d* | AB*c*D*e* |
| | | | *ab*C | A*bc*D | AB*cd*E |
| | | | *abc* | A*bcd* | AB*cde* |
| | | | | *a*BCD | A*b*CDE |
| | | | | *a*BC*d* | A*b*CD*e* |
| | | | | *a*B*c*D | A*b*C*d*E |
| | | | | *a*B*cd* | A*b*C*de* |
| | | | | *ab*CD | A*bc*DE |
| | | | | *ab*C*d* | A*bc*D*e* |
| | | | | *abc*D | A*bcd*E |
| | | | | *abcd* | A*bcde* |
| | | | | | *a*BCDE |
| | | | | | *a*BCD*e* |
| | | | | | *a*BC*d*E |
| | | | | | *a*BC*de* |
| | | | | | *a*B*c*DE |
| | | | | | *a*B*c*D*e* |
| | | | | | *a*B*cd*E |
| | | | | | *a*B*cde* |

*ab*CDE
*ab*CD*e*
*ab*C*d*E
*ab*C*de*
*abc*DE
*abc*D*e*
*abcd*E
*abcde*

Für die Praxis hat man auf diese Weise im voraus die Verzeichnisse der Combinationen von 1, 2, 3, 4, 5 u. s. w. Begriffen und braucht sie nur mit den jedesmaligen Prämissen, je nachdem diese 1, 2, 3, 4, 5 u. s. w. Begriffe enthalten, zu vergleichen, um nach Maſsgabe der dargelegten Regeln die mit den Prämissen verträglichen Combinationen zu erkennen.

VIII. Wie man aus dieser raschen Skizze ersieht, lässt sich jede auch noch so verwickelte logische Aufgabe auf sozusagen mechanischem Wege lösen; die einzige Schwierigkeit ist die Länge der bisweilen dazu erforderlichen Arbeit. Um diesem Mangel abzuhelfen, hat Jevons verschiedene Mittel erdacht; das sinnreichste und wichtigste darunter ist die logische Maschine.[1])

Die logische Maschine ist eine Art Klavier mit 21 Tasten, von welchen 16 die Begriffe oder Buchstaben A, *a*, B, *b*, C, *c*, D, *d* vorstellen, und zwar die 8 Tasten links und die 8 Tasten rechts von der mittleren Taste, deren Function sogleich angegeben werden wird, jene die positiven und die negativen Subjectsbegriffe, diese die positiven und die negativen Prädicatsbegriffe. Die übrigen sind die Operationstasten: die Punkte, die Copula und die disjunctiven Conjunctionen. Die mittlere Taste ist die Copula; die äuſserste rechts ist der Punkt und ist am Ende eines Satzes zu drücken, während die äuſserste links am Ende eines Schlusses gedrückt wird, um die Maschine wieder in ihren

---

[1]) *Princ. of science* B. I. Kap. 6; *On the mechanical etc.*

ursprünglichen Zustand zu versetzen. Die vorletzte Taste auf jeder Seite repräsentirt die Conjunction „oder".

Tastatur der logischen Maschine.

| Ende. | Subjecte | | | | | | | | | Copula. | Prädicate | | | | | | | | | Punkt. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ·!· oder | *d* | D | *c* | C | *b* | B | *a* | A | | A | *a* | B | *b* | C | *c* | D | *d* | ·!· oder | |

Um die Maschine in Tätigkeit zu setzen, ist weiter nichts erforderlich als die Tasten nacheinander in der durch die Buchstaben und Zeichen eines symbolischen Satzes gegebenen Reihenfolge zu drücken. Ist der Satz z. B. A = AB, so drückt man nach einander die Tasten A (Subject), Copula, A (Prädicat), B (Prädicat) und den Punkt. Ist die Prämisse B = BC, so drückt man B (Subject), Copula, B (Prädicat), C (Prädicat) und den Punkt. Es erscheinen alsdann auf der Oberfläche der Maschine alle nach den Denkgesetzen mit den Prämissen übereinstimmenden Combinationen von A, B, C, *a*, *b*, *c*.

Oben auf der Maschine befindet sich ein logisches Abecedarium von 16 Combinationen:

| A | A | A | A | A | A | A | A | *a* | *a* | *a* | *a* | *a* | *a* | *a* | *a* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | B | B | B | *b* | *b* | *b* | *b* | B | B | B | B | *b* | *b* | *b* | *b* |
| C | C | *c* | *c* | C | C | *c* | *c* | C | C | *c* | *c* | C | C | *c* | *c* |
| D | *d* | D | *d* | D | *d* | D | *d* | D | *d* | D | *d* | D | *d* | D | *d* |

In Folge der oben beschriebenen Operationen verschwinden die mit den Prämissen nicht vereinbaren Combinationen

von der Tafel, und es bleiben, als allein mit ihnen vereinbar, nur die folgenden übrig:

| A | A | | | | | | | *a* | *a* | | | *a* | *a* | *a* | *a* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | B | | | | | | | B | B | | | *b* | *b* | *b* | *b* |
| C | C | | | | | | | C | C | | | C | C | *c* | *c* |
| D | *d* | | | | | | | D | *d* | | | D | *d* | D | *d* |

Die Maschine gibt uns so die Bestimmung von A, B, C, *a*, *b*, *c* unter den durch die Prämissen A = AB, B = BC gegebenen Bedingungen und die daraus hervorgehenden Schlüsse z. B. das A immer C ist, dass nicht-C nicht-B ist, dass nicht-B ist nicht-A und C oder nicht-C.

Die Behandlung der disjunctiven Urteile ist genau dieselbe. Sind z. B. die Prämissen

A = AB ·|· A*b*

B ·|· *b* = BD ·|· CD

so drückt man nacheinander die Tasten A (Subject), Copula, A (Prädicat), B (Prädicat), Conjunction, A (Prädicat) *b* (Prädicat), Punkt, B (Subject), Conjunction, *b* Subject), Copula, B (Prädicat), D (Prädicat), Conjunction, C (Prädicat), D (Prädicat), Punkt. — Die mit den Prämissen nicht übereinstimmenden Combinationen von A, B, C, D, *a*, *b*, *c*, *d*, verschwinden, und übrig bleiben:

ABCD

AB*c*D

A*b*CD

*a*BCD

*a*B*c*D

*ab*CD

*abc*D
*abcd*

Wie man sieht, ist diese Maschine, deren inneren Mechanismus wir hier nicht zu beschreiben haben,[1]) gleichsam die materielle Realisirung der ganzen Substitutionslogik. Wenn gewisse Prämissen gegeben sind, classificirt, wält und verwirft sie die Begriffscombinationen, wie es ein denkender Geist tun würde; die automatische Genauigkeit ihrer Ergebnisse ist ein Beweis für die Richtigkeit des Systems, das sie ausführt.

IX. Die Induction ist die umgekehrte Deduction und wie jeder inverse Process viel verwickelter als das entsprechende directe Verfahren. Gewöhnlich definirt man sie als diejenige Schlussweise, vermöge welcher unser Geist von der Kenntnis der Erscheinungen zur Kenntnis der diese beherrschenden Gesetze, oder von dem Besonderen zum Allgemeinen aufsteigt. Diese Definition ist richtig, wo es sich um die materielle Induction handelt, unzulänglich dagegen, sobald die formale, von allem Stofflichen absehende Induction in Frage kommt.[2])

Die logische Deduction in ihrem ganzen Umfange besteht darin, aus einem oder mehreren Gesetzen sämtliche Combinationen abzuleiten, welche unter den in diesen Gesetzen ausgesprochenen Bedingungen bestehen können. So besagt das Gesetz, dass alle Metalle Elektricitätsleiter sind, in Wahrheit, dass wir in der Natur drei Klassen von Dingen finden: 1) die Metalle, welche Leiter sind; 2) die Leiter, welche nicht Metalle sind; 3) die Nicht-Metalle, welche Nicht-Leiter sind. Eine vierte Klasse: die Metalle, welche Nicht-Leiter sind, ist als contradictorische Begriffe enthaltend durch das Gesetz beseitigt.

Umgekehrt besteht die formale Induction in der Bestimmung der Gesetze, welche gewisse gegebene Klassen

---

[1]) Vgl. *On the mechanical performance.*

[2]) Vgl. *Princ. of science* B. I, Kap. 7; *On the inverse, or inductive logical problem.*

von Dingen voraussetzen, oder besser in der Bestimmung der allgemeinen Sätze, welche die Bedingungen gegebener Begriffscombinationen enthalten. Sind z. B. gegeben die beiden Begriffe A und B und die Combinationen AB, *a*B, A*b*, *ab*, welche aus der Verbindung dieser Begriffe und ihrer Negationen entstehen können, so hat die Induction die Gesetze zu finden, welche die Combinationen von A, von B, von *a* und von *b* beherrschen.

Wir haben gesehen, dass ein Gezetz etliche Combinationen der von ihm beherrschten Dinge oder Begriffe als contradictorisch ausschliefst. So steht dass Gesetz, das die Metalle leiten, der Existenz von nichtleitenden Metallen entgegen. Es muss mithin für eine begrenzte Zal von Dingen oder Begriffen die Zal der möglichen Gesetze, denen diese Dinge oder Begriffe unterworfen werden können, begrenzt sein, und es gilt zuvörderst, die Zal der Gesetze zu bestimmen, welche die Combination gegebener Begriffe beherrschen können,

Den Denkgesetzen zufolge können die beiden Begriffe A und B nebst ihren Gegenteilen *a* und *b* in den folgenden 4 Combinationen vorkommen oder fehlen:

AB, A*b*, *a*B, *ab*.

Da nun jedes der möglichen Gesetze dieser Combinationen eine oder mehrere von ihnen ausschliefsen muss, kann ihre Zal die der Grenzfälle, in denen sämtliche Combinationen stattfinden oder fehlen und aller in der Mitte liegenden Fälle, in denen eine oder mehrere von ihnen stattfinden oder fehlen, nicht überschreiten. Verzeichnen wir die Fälle:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | Fall | AB, A*b*, *a*B, *ab* | fehlen, |
| 2. | „ | *ab* | allein findet statt, |
| 3. | „ | *a*B | allein findet statt. |
| 4. | „ | *a*B, *ab* | finden statt, |
| 5. | „ | A*b* | allein findet statt, |
| 6. | „ | A*b*, *ab* | finden statt, |
| 7. | „ | A*b*, *a*B | finden statt, |
| 8. | „ | A*b*, *a*B, *ab* | finden statt, |

| | | |
|---|---|---|
| 9. Fall | AB | allein findet statt, |
| 10. „ | AB, *ab* | finden statt, |
| 11. „ | AB, *a*B | finden statt, |
| 12. „ | AB, *a*B, *ab* | finden statt, |
| 13. „ | AB, A*b* | finden statt, |
| 14. „ | AB, A*b*, *ab* | finden statt, |
| 15. „ | AB, A*b*, *a*B | finden statt, |
| 16. „ | AB, A*b*, aB, *ab* | finden statt. |

Jeder dieser Fälle spricht ein oder mehrere Gesetze aus; der zehnte z. B. besagt: jedes A ist B und jedes nicht-A ist nicht-B und ebenso die übrigen.

Es fragt sich nun, welche von diesen Fällen formal richtig sind. Neun von ihnen, Fall 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 11 und 13 müssen beseitigt werden. Einer der gegebenen Begriffe oder seine Verneinung fehlt darin, und wir wissen, dass das Fehlen eines positiven oder des entsprechenden negativen Begriffs in einer Combination das Zeichen irgend eines Widerspruches in den Bedingungen der Combination ist. So werden die beiden Bedingungen A ist B und A ist nicht B, welche contradictorisch sind, das Resultat haben, dass keine Combination von A mit B statthaft ist. Wir haben uns daher lediglich mit den Fällen zu befassen, in welchen A und B, *a* und *b* vorkommen. Es sind sieben Fälle, vier davon: 8, 12, 14, 15 bieten drei Combinationen; zwei: 7 und 10 zwei; einer endlich, Fall 16, enthält vier Combinationen.

Betrachten wir zunächst die vier ersten. Wir wissen, dass ein Satz von der Form A = AB die Combination A*b* verbietet, da *b* die Negation von B ist, welches wiederum durch A = AB mit A identisch ist. Es trifft das für Fall 12 zu, in welchem die Combination A*b* nicht statt findet.

Der Satz A = AB kann durch Vertauschung der Begriffe oder Substitution der entsprechenden negativen für die positiven, acht verschiedene Gestalten annehmen:

$$A = AB \quad A = Ab \quad a = aB \quad a = ab$$
$$b = ab \quad B = aB \quad b = Ab \quad B = AB,$$

welche je zwei und zwei einander contrapositiv und daher

parweise gleichwertig sind. Von den acht verschiedenen Formen des Satzes $A = AB$ haben daher nur vier eine logisch selbständige Bedeutung, nämlich

$$A = AB$$
$$A = Ab$$
$$a = aB$$
$$a = ab$$

Blickt man nun auf das Verzeichnis der Fälle, so ergeben diese vier Sätze ihre in den Gruppen 12, 8, 15, 14 beziehungweise enthaltenen Combinationen. Somit sind diese Gruppen auf ihr Gesetz zurückgeführt.

Verbinden wir jetzt diese vier Sätze zu je zweien, so werden wir sehen, dass sie meistens in Widerspruch mit einander stehen, z. $A = AB$ mit $A = Ab$. Nur zwei Pare geben nichtcontradictorische Resultate, nämlich

$$A = AB$$
$$a = ab$$
$$\text{und } A = Ab$$
$$a = aB.$$

Das erste dieser beiden Pare ergibt die Combinationen der Gruppe 10, das zweite die der Gruppe 7. Diese beiden Gruppen sind daher ebenfalls auf ihre resp. Gesetze zurückgeführt: $A = AB$, $A = Ab$.

Übrig ist noch Fall 16, welcher vier Combinationen enthält. Aber eben weil sämtliche Combinationen von A, B, $a$ und $b$, darin vorkommen, sind diese keinem anderen Gesetze als den allgemeinen Denkgesetzen unterworfen.

Somit können zwei Begriffe nur in sieben Combinationen erscheinen, welchen folgende Gesetze entsprechen:

Für AB, $a$B, $ab$ — $A = AB$ oder $b = ab$
Für A$b$, $a$B, $ab$ — $A = Ab$ oder $B = aB$
Für AB, A$b$, $ab$ — $a = aB$ oder $b = Ab$
Für AB, A$b$, $a$B — $a = ab$ oder $B = AB$
Für AB, $a$B — $A = B$ oder $a = b$
Für A$b$, $a$B — $A = b$ oder $a = B$
Für AB, A$b$, $a$B, $ab$ kein Gesetz.

Es ergibt sich hieraus, dass jedes logische Verhältnis

zwischen zwei Begriffen sich durch ein Urteil von der Form A + AB oder A + B d. h. von der Form einer partiellen oder einer einfachen Identität darstellen lässt.

Schon dies eine Beispiel, das einfachste von allen, reicht hin, um zu zeigen, wie verwickelt und abstract der inverse Process der Deduction ist. Mit der Zal der in Betracht kommenden Begriffe nehmen die Schwierigkeiten zu, dergestalt dass sie bald unübersteigbar werden.

So beläuft sich bei drei Begriffen die Zal der zu behandelnden Reihen auf 256, bei vier Begriffen auf 65596, bei fünf auf 4,294,967,296, bei sechs auf 18,446,744,073,709,551,616. Die formale Induction ist daher, von ganz einfachen Fällen abgesehen, ein praktisch unausführbares Verfahren. —

Hier endigt die Darstellung, welche der Gegenstand vorliegender Schrift ist. Sie hat den inneren Zusammenhang sowie die allmäliche Erweiterung und Vereinfachung der verschiedenen aus dem Princip der Quantificirung des Prädicats hervorgegangenen Systeme nachgewiesen, und es hätte nun die Kritik zu beginnen — eine weitschichtigere und schwierigere Arbeit, welche wir uns vorbehalten müssen.

---

Druck von Felix Freyhoff in Schwedt.

